TEODOR STIHI

ALGEBRĂ LINIARĂ

Teorie şi probleme rezolvate

1999

Colecția *Matematică – Fizică – Automatică* a editurii **ALL** cuprinde:

1. **Lecții de analiză matematică,**
   P. Flondor, O Stănăşilă
2. **Matematici speciale – teorie, exemple, aplicații,**
   V. Brînzănescu, O. Stănăşilă
3. **Algebră liniară, geometrie analitică şi diferențială,**
   C. Radu
4. **Probleme de fizică,**
   M. Penescu
5. **Fizică – Vol. I, Vol. II,**
   Cornelia Moțoc
6. **Teoria sistemelor. Sinteza robustă. Metode numerice de calcul,**
   V. Ionescu, A. Varga
7. **Stabilizarea sistemelor liniare,**
   A. Halanay, V. Drăgan
8. **Probleme rezolvate de fizică nucleară,**
   colectiv Catedra de Fizică Atomică şi Nucleară,
   Facultatea de Fizică, Universitatea Bucureşti
9. **Simularea Monte Carlo a transportului radiațiilor,**
   O. Sima
10. **Analiză matematică – culegere de probleme – Vol. I şi II,**
    N. Donciu, D. Flondor
11. **Probleme de algebră liniară, geometrie analitică, diferențială şi ecuații diferențiale,**
    G. Atanasiu, Gh. Munteanu, Mihai Postolache
12. **Algebră liniară – teorie şi probleme rezolvate,**
    Teodor Stihi
13. **1000 de probleme rezolvate şi exerciții fundamentale,**
    Ana Niță, Tatiana Stănăşilă, O. Stănăşilă
14. **Elemente de aritmetică,**
    Constantin Vraciu, Mariana Vraciu
15. **Subiecte de licență, Facultatea de Automatică şi Calculatoare,**
    coordonatori:Nicolae Cupcea, Ion Fătu
16. **Metode de calcul numeric matriceal. Algoritmi fundamentali,**
    Bogdan Dumitrescu, Corneliu Popeea, Boris Jora

Către cititor

Cartea de faţă reprezintă o iniţiere în Algebra liniară. Alegerea temelor şi însuşi modul de tratare a lor au drept scop utilizarea acestui important instrument de investigaţie şi de calcul în fizică, în inginerie sau în economie, statistică etc.

Schematizând ideile putem spune că primele trei capitole studiază, sub diverse aspecte, sistemul liniar $Ax = b$, iar ultimele două – problema $Ax = \lambda x$ cu valori şi vectori proprii. Foarte multe aplicaţii se reduc la probleme de acest tip. În rezolvarea lor apar interferenţe cu alte discipline precum Analiza numerică, Geometria şi Analiza matematică. Era firesc ca în lucrare să-şi facă loc elemente din aceste domenii pentru a lămuri şi completa studiul problemelor în cauză. În ultimă instanţă, rezolvarea numerică a acestora cade în sarcina calculatorului şi a unor programe din biblioteca lui. Dar utilizarea lor fără o cunoaştere a domeniului transformă întreaga acţiune într-un joc "de-a baba–oarba".

Am orientat prezentarea şi tratarea diferitelor teme pe principii strict pragmatice, renunţând - uneori cu regret - la aspecte teoretice importante, pentru a da acces direct în miezul aplicativ al chestiunilor. Nu am renunţat însă la virtuţile unui text matematic: rigoarea definiţiilor şi a demonstraţiilor. Este drept că nu toate teoremele au fost demonstrate. Şi mai este adevărat că în cazul unora din ele am dat numai câteva idei demonstrative, dar nu sub titlu şi cu pretenţia de a se substitui unei demonstraţii - ce va putea fi găsită de cititor în alte lucrări similare.

Pentru înţelegerea acestor pagini sunt necesare cunoştinţe de calcul algebric (inclusiv de calcul matriceal şi al determinanţilor) la nivelul celor din manualele de liceu. Este necesară de asemenea şi o anumită deprindere a rigorii raţionamentului matematic.

Aflat la sfârşitul unui capitol cititorul îşi va putea testa calitatea cunoştinţelor dobândite, răspunzând la chestiunile recapitulative. Acelaşi rol îl joacă şi o parte din exerciţiile ce însoţesc fiecare paragraf, cealaltă reprezentând o completare a teoriei. În plus, pentru acestea din urmă, anexa E oferă răspunsuri sau soluţii, uneori cu ample comentarii.

Reprezentând suportul unui curs predat în anul întâi al facultăţilor cu profil tehnic, lucrarea s-a văzut confruntată cu o restricţie procustiană: numărul de ore alocat algebrei. Am redus sau am renunţat complet la unele teme tradiţionale - forma Jordan de pildă, făcând totodată loc unor subiecte netradiţionale, cum ar fi pseudoinversa.

Discutabilă în sine, o asemenea alegere ţine de cerinţele prezentului în învăţământul tehnic şi are precedente remarcabile în literatura de specialitate.

Suntem conştienţi de dificultăţile pe care cititorul le poate întâlni în studiul acestei lucrări. Nu este recomandabil şi nici posibil să descifrezi totul de la prima lectură. Numai o reluare repetată - la nivele din ce în ce mai profunde - permite depăşirea unor obstacole fireşti. Nici un eşec nu este definitiv! Perseverarea în studiu este, nu diabolică, ci salutară şi deschide calea cunoaşterii. În lumina ei vom descoperi adevărata satisfacţie intelectuală - răsplată pe măsura unui asemenea efort.

Numeroasele trimiteri ce împânzesc textul nu sunt necesare la o primă lectură - desigur superficială. Dar într-un studiu aprofundat - incluzând parcurgerea calculelor şi a argumentelor demonstrative - urmărirea lor poate fi utilă.

Autorul

Notă *Regăsirea unui enunţ (teoremă, formulă etc) din această lucrare se face pe baza codului alcătuit din două numere şi plasat în faţa sa. Primul număr este al paragrafului în care se află enunţul, iar al doilea este numărul de ordine al enunţului în intervalul acelui paragraf. Expresia "conform (sau vezi) 5.1" se va referi aşadar la un rezultat, purtând acest cod şi aflat în paragraful 5* ***al capitolului din care se face trimiterea****. Când trimiterea se face la un enunţ cu acelaşi cod, dar din alt capitol - de pildă 3 - ea va purta adresa (3).5.1.*
Pentru a facilita găsirea pe bază de coduri a diferitelor enunţuri, am inclus în titlul fiecărei pagini o indicaţie despre numărul de capitol şi cel de paragraf. De exemplu: §(3).5 înseamnă că vă aflaţi în capitolul 3, paragraful 5.

PRESCURTĂRI *Menţionăm utilizarea unor prescurtări clasice: e.g. = de exemplu, i.e. = adică, dar şi neclasice: d.n.d. = dacă şi numai dacă, v.p. = valori / vectori proprii, ex. = exerciţiu etc.*

CUPRINS

Capitolul 1
METODA ELIMINĂRII SUCCESIVE A NECUNOSCUTELOR (GAUSS) 1

§1. Metoda Gauss pentru rezolvarea sistemelor liniare 3×3 nesingulare 1
§2. Notaţia şi descrierea matriceală a procesului de eliminare; descompunerea $A=LU$ 1
§3. "Costul" rezolvării unui sistem liniar $n \times n$ prin metoda Gauss 5
§4 Necesitatea permutărilor în procesul de eliminare. Efectul erorilor de rotunjire 6
§5. Descompunerea $PA=LU$ 9
§6. Indicaţii practice pentru aplicarea metodei Gauss 11
6.1. Metoda Gauss aplicată mai multor sisteme. Utilizarea descompunerii LU 12
6.2. Varianta Gauss-Jordan a algoritmului de eliminare succesivă a necunoscutelor 13
§7. Metoda diferenţelor finite 14
§8. Simetrizarea descompunerii $A=LU$ pentru matricele simetrice. Descompunerea $A = LDL^T$ 16
§9. Descompunerea LDU pentru matrice nesingulare şi unicitatea sa 17
§10. Rezolvarea sistemelor cu m ecuaţii şi n necunoscute (dreptunghiulare) 19
Chestiuni recapitulative 25

Capitolul 2
SPAŢII VECTORIALE ŞI APLICAŢII LINIARE 27

§1. Noţiunea de spaţiu vectorial de coloane 27
§2. Independenţa liniară a vectorilor 29
§3. Sistem de generatori. Bază 30
§4. Dimensiunea unui spaţiu vectorial 33
§5. Spaţiile fundamentale ale unei matrice de numere reale 34
5.1. Spaţiul liniilor matricei A: $\mathcal{I}(A^T)$ 35
5.2. Nucleul matricei A: $\mathcal{N}(A)$ 36
5.3. Spaţiul coloanelor matricei A: $\mathcal{I}(A)$ 36
5.4. Nucleul stâng al matricei A: $\mathcal{N}(A^T)$ 38
§6. Aplicaţii liniare. Izomorfism 39
§7. Matricea ca aplicaţie liniară şi aplicaţia liniară ca matrice 42
7.1. Matricea ca aplicaţie liniară 42
7.2. Aplicaţia liniară ca matrice 43
§8. Suma şi intersecţia de subspaţii 45
8.1. Suma de subspaţii 45
8.2. Determinarea sumei şi intersecţiei a două subspaţii 45
8.3. Descompunerea spaţiului în sumă directă de subspaţii 49
Chestiuni recapitulative 50

Capitolul 3
GEOMETRIA SPAŢIULUI $\mathbb{R}^n$ 51

§1. Produs scalar şi ortogonalitate 51
§2. Relaţii geometrice între subspaţiile fundamentale ale matricei $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ 54
§3. Matricea ca aplicaţie liniară. Studiu geometric 57
§4 Metoda celor mai mici pătrate şi proiecţia unui vector pe un subspaţiu 59

§5. Matrice de proiecţie şi matrice ortogonale 62
5.1. Matrice de proiecţie 62
5.2. Matrice ortogonale 63
§6. Procedeul Gram-Schmidt de ortogonalizare. Descompunerea QR a matricelor 65
§7. Pseudoinversa A^+ a matricei A 68
Chestiuni recapitulative 70

Capitolul 4
VALORI ŞI VECTORI PROPRII. FORME CANONICE DE MATRICE 72
§1. Problema VVP 72
§2. Polinomul caracteristic 74
§3. Spaţiile proprii 76
§4. Geometria spaţiilor $\mathbb{C}^n$ 77
§5. Problema VVP pentru matricele hermitice 80
§6. Teorema spectrală şi descompunerea spectrală 81
§7. Triunghiularizarea 83
§8. Diagonalizarea şi jordanizarea 87
§9. Metode pentru rezolvarea problemelor liniare cu condiţii iniţiale 90
9.1. Recurenţe liniare 90
9.2 Matricea exponenţială e^{At} 92
Chestiuni recapitulative 94

Capitolul 5
FORME PĂTRATICE. MATRICE DEFINITE ŞI SEMIDEFINITE 96
§1. Schimbarea matricei asociate la schimbarea bazei 96
§2. Reducerea ortogonală a unei f.p. la axele principale şi aplicaţii geometrice 98
§3. Teorema inerţiei şi consecinţe 102
§4. Matrice simetrice definite 107
§5. Matrice simetrice semidefinite 109
§6. Problema VVP generalizată: $Ax = \lambda Bx$ 110
§7. Descompunerea singulară 112
Chestiuni recapitulative 116

ANEXE 118
Anexa A. Matricea schimbării de coordonate 118
Anexa B. Determinanţi 120
Anexa C. Metode de calcul pentru pseudoinversa unei matrice 123
Anexa D. O metodă de calcul a exponenţialei e^{At} 125
Anexa E. Soluţiile exerciţiilor 127

INDEX DE SUBIECTE 149

BIBLIOGRAFIE 151

Capitolul 1

METODA ELIMINĂRII SUCCESIVE A NECUNOSCUTELOR (GAUSS)

Rezumat. Metoda eliminării succesive a necunoscutelor este cea mai utilizată dintre metodele "**exacte**", pentru rezolvarea sistemelor liniare. Propusă de marele matematician **K.F.Gauss** (1777-1855), ea îi poartă numele. Deşi generală, se aplică mai ales sistemelor liniare cu n ecuaţii şi n necunoscute (n×n) având matricea nesingulară. O vom descrie în cazul n=3 (§1). Notaţia matriceală şi în special operaţia numită **produsul matricelor**, permit o reprezentare compactă a celor trei paşi ai procesului de eliminare, conducând la descompunerea **LU** a matricei sistemului (§2). Pe de altă parte, făcând obiectul activităţii practice, metoda ridică probleme legate de aceasta: câte "**operaţii de maşină**" cheltuieşte (§4) şi cum face faţă **erorilor "de rotunjire"** ce apar în calcul (§5). Ca efect al utilizării permutărilor, procesul Gauss conduce la o descompunere modificată a matricii A: **PA=LU** (§5), iar sub raportul economisirii "operaţiilor de maşină", se pot face recomandări utile (§6). Ajungem astfel la analiza primei aplicaţii concrete: reducerea, prin **discretizare**, a unei **probleme la limită** pentru o ecuaţie diferenţială, la un sistem algebric (§7). Ea oferă prilejul întâlnirii cu matricele **simetrice**, având o descompunere LU simetrică (§8), precum şi rezolvarea primei probleme teoretice importante: **unicitatea** acestei descompuneri (§9). Generalizarea metodei eliminării succesive la sisteme dreptunghiulare, deschide propriu-zis problematica algebrei liniare (§10).

§1. Metoda Gauss pentru rezolvarea sistemelor liniare 3×3 nesingulare

Această metodă este cea mai utilizată din clasa metodelor numite "exacte" de rezolvare a sistemelor liniare.[1] Formularea sa în tipare precise permite transpunerea într-un **algoritm** - etapă necesară transpunerii într-un limbaj de programare.

Vom explica, pentru a înţelege metoda, cum funcţionează ea în cazul sistemului liniar având trei ecuaţii, trei necunoscute şi pe care îl notăm

$$\textbf{(1.1)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

Numărul a_{11} - presupus nenul - îl numim **pivot** şi notăm $\frac{a_{21}}{a_{11}} = m_{21}$, $\frac{a_{31}}{a_{11}} = m_{31}$.

[1] Există metode iterative ce produc un şir (convergent) de "aproximări" ale soluţiei.

Aceste două cături poartă numele de **multiplicatori**, deoarece urmează să înmulţim prima ecuaţie, pe rând, cu fiecare din ei, pentru a o scădea apoi din a doua şi respectiv din a treia ecuaţie. Am efectuat astfel primii doi **paşi** dintr-un **proces de eliminare** sau **proces Gauss**; în cazul de faţă aceşti paşi alcătuiesc prima **etapă** a procesului, în urma căreia sistemul 1.1 devine

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ (a_{22}-m_{21}a_{12})x_2 + (a_{23}-m_{21}a_{13})x_3 = b_2-m_{21}b_1, \\ (a_{32}-m_{31}a_{12})x_2 + (a_{33}-m_{31}a_{13})x_3 = b_3-m_{31}b_1. \end{cases}$$

sau, printr-o renotare a coeficienţilor

$$\text{(1.2)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a'_{22}x_2+a'_{23}x_3=b'_2, \\ a'_{32}x_2+a'_{33}x_3=b'_3. \end{cases}$$

Pentru a trece la etapa următoare presupunem pivotul a'_{22} nenul şi calculăm multiplicatorul $\frac{a'_{32}}{a'_{22}}=m_{32}$, apoi înmulţim ecuaţia a doua cu m_{32} şi o scădem din a treia; rezultă

$$\text{(1.3)} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_{22} + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ (a'_{33}-m_{32}a'_{23})x_3 = b'_3-m_{32}b'_2. \end{cases}$$

Printr-o renotare a coeficienţilor, ultima ecuaţie se rescrie

$$a''_{33}x_3=b''_3.$$

Obţinerea sistemului având matricea coeficienţilor necunoscutelor - **triunghiulară**[1]

$$\text{(1.4)} \qquad U=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a'_{22} & a'_{23} \\ & & a''_{33} \end{bmatrix}$$

(elementele nespecificate sunt nule) încheie procesul de eliminare (Gauss).

Sistemul va fi acum rezolvat prin substituţii în ordinea regresivă: atât a necunoscutelor cât şi a ecuaţiilor. Calculând

$$x_3=\frac{b''_3}{a''_{33}} \text{ (presupunem } a''_{33}\neq 0),$$

---

[1] Se notează cu U matricele superior triunghiulare ("upper" în limba engleză însemnând superior) şi cu L matricele inferior triunghiulare ("lower"=inferior).

îl introducem în a doua ecuaţie, din care extragem

$$x_2=\frac{b_2'-a_{23}'x_3}{a_{22}'} \text{ etc.}$$

EXERCIŢIUL 1.1

a) Rezolvaţi prin substituţii regresive sistemul cu matricea triunghiulară

$$\begin{cases} x_1-x_3+x_4=2, \\ 2x_2+x_3+2x_4=0, \\ x_3-x_4=1, \\ 4x_4=-1. \end{cases}$$

b) Aplicaţi transformările procesului de eliminare gaussiană sistemului

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4, \\ 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4. \end{cases}$$

pentru a-l "triunghiulariza"; apoi calculaţi-i soluţia.

c) Câte etape ale procesului de eliminare trebuie parcurse pentru a "triunghiulariza" un sistem de patru ecuaţii cu patru necunoscute ?
Cîţi paşi sunt conţinuţi în aceste etape?

§2. Notaţia şi descrierea matriceală a paşilor procesului de eliminare; descompunerea $A=LU$

Să reamintim cea mai importantă operaţie cu matrice: **produsul matricelor**, sub forma particulară a produsului între matricea

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ şi matricea-coloană } x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Matricea produs va fi

$$Ax=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{bmatrix}.$$

Aşadar, egalitatea matriceală

(2.1) $$Ax=b$$

reprezintă, într-o formă condensată, cele trei ecuaţii ale sistemului 1.1. Vom găsi asemenea forme şi pentru sistemele 1.2 şi 1.3.

Considerăm matricea[1]

$$E_{21}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -m_{21} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

cu care amplificăm egalitatea 2.1:

(2.2) $$E_{21}(Ax)=E_{21}b\,.$$

Cf. **asociativităţii** produsului matricelor

$$E_{21}(Ax)=(E_{21}A)x\,.$$

Pe de altă parte, matricea $E_{21}A$ se obţine din A prin scăderea din linia a doua a primei linii amplificată cu m_{21} (verificaţi!).

Am obţinut o reprezentare matriceală a primului pas din procesul de eliminare.

Amplificând egalitatea 2.2 cu

$$E_{31}=\begin{bmatrix}1 & & \\ 0 & 1 & \\ -m_{31} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

găsim echivalentul matriceal al sistemului 1.2

(2.3) $$E_{31}E_{21}Ax=E_{31}E_{21}b$$

(Cf. asociativităţii am suprimat parantezele.)

Ultimul pas este amplificarea sistemului 2.3 cu

$$E_{32}=\begin{bmatrix}1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -m_{32} & 1\end{bmatrix}$$

(2.4) $$E_{32}E_{31}E_{21}Ax=E_{32}E_{31}E_{21}b\,.$$

Deci

(2.5) $$E_{32}E_{31}E_{21}A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ & a'_{22} & a'_{23}\\ & & a''_{33}\end{bmatrix}=U\,.$$

Amplificând 2.5, pe rând cu

$$E_{32}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & m_{32} & 1\end{bmatrix},\ E_{31}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & \\ 0 & 1 & \\ m_{31} & 0 & 1\end{bmatrix}\ \text{şi}\ E_{21}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & \\ m_{21} & 1 & \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

obţinem

---

[1] Aceste matrice şi transformările pe care le produc coeficienţilor sistemului, se numesc ***elementare***.

(2.6) $$A = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1}U.$$

Matricea

$$E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ m_{21} & 1 & \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} = L,$$

care conţine multiplicatorii procesului (în ordinea utilizării), se numeşte **matricea multiplicatorilor**.

(2.7) CONCLUZII. 1) ***Sistemul*** $Ax = b$ ***este echivalent cu sistemul*** $Ux = c$ ***obţinut din acesta prin eliminare (conf. ex. 1.2d).***

2) ***Ca rezultat al procesului de eliminare matricea*** A ***se descompune sub forma*** $A = LU$.

EXERCIŢIUL 1.2

a) Construiţi matricea multiplicatorilor (L) corespunzătoare procesului de eliminare din exerciţiul 1.1.b, apoi verificaţi prin înmulţire directă egalitatea $A=LU$, U fiind matricea triunghiulară a sistemului obţinut în urma eliminării.

b) Reprezentaţi matriceal cei şase paşi ai procesului de eliminare în cazul unui sistem 4×4.

c) Justificaţi echivalenţa sistemelor 2.1, 2.2, 2.3 şi 2.4 bazându-vă pe posibilitatea de a inversa cei trei paşi ai eliminării.

d) Regula de înmulţire a matricelor are multe consecinţe utile între care vă propunem să o verificaţi pe următoarea: dacă A este matrice 3×3 şi x, y, z sunt trei coloane tridimensionale alcătuind matricea 3×3: $X = [x|\ y|\ z]$, atunci $AX = [Ax|\ Ay|\ Az]$.

Altfel spus, matricea produs AX are drept coloane produsele Ax, Ay, Az.

§3. "Costul" rezolvării unui sistem liniar $n \times n$ prin metoda Gauss[1]

În practică, maşina de calcul este cea care rezolvă problemele de calcul. Fiecare operaţie efectuată de ea are o anumită durată, deci un anumit preţ de cost. Este util să evaluăm, chiar şi aproximativ, acest preţ.

Deoarece o adunare sau scădere durează mult mai puţin decât o înmulţire sau o împărţire, vom conveni să considerăm drept "operaţie de maşină" - o înmulţire sau o împărţire împreună cu o (eventuală) adunare sau scădere. Ne propunem să evaluăm numărul operaţiilor de maşină necesare aducerii unei matrice $n \times n$ la forma superior triunghiulară U, prin metoda Gauss.

Spre a produce un zero sub primul pivot, trebuie să facem o împărţire (calcularea multiplicatorului) şi n-1 înmulţiri-scăderi.

Prima etapă a procesului de eliminare necesită $n(n-1)$ operaţii de maşină. Pentru a doua etapă vor fi necesare $(n-1)(n-2)$ operaţii etc.

În total, procesul de eliminare consumă

---

[1] Problemele discutate în acest paragraf şi în următorul, aparţin **Algebrei numerice**.

$$(n^2-n)+\ldots+(k^2-k)+\ldots+(1^2-1)=\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k=$$

$$=\frac{1}{3}n(n+\frac{1}{2})(n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{n^3-n}{3}\text{ operaţii.}$$

Deoarece, pentru valori mari ale lui n, n^3 este mult mai mare decât n, se poate aproxima, în practică, acest total prin

$$\frac{n^3}{3}\text{ operaţii de maşină.}$$

Costul substituţiilor regresive este mult mai scăzut. Notăm $Ux=c$ sistemul obţinut după eliminare. Din ultima sa ecuaţie $u_{nn}x_n = c_n$, necunoscuta x_n se obţine printr-o împărţire. Din penultima ecuaţie $u_{n-1\,n-1}x_{n-1}+u_{n-1\,n}x_n = c_{n-1}$ necunoscuta x_{n-1} se obţine printr-o înmulţire-scădere şi o împărţire etc. Totalul va fi de $\sum_{k=1}^{n}k = \frac{1}{2}n(n+1)$, adică de aproximativ

$$\frac{n^2}{2}\text{ operaţii de maşină.}$$

EXERCIŢIUL 1.3

a) Evaluaţi numărul operaţiilor de maşină (aici, operaţie = înmulţire + adunare) necesare calculării produsului a două matrice $n\times n$.

b) Cunoscând descompunerea $A=LU$, determinarea soluţiei sistemului liniar $Ax=b$ se face în două etape: calcularea soluţiei sistemului $Ly=b$, apoi a soluţiei x a sistemului $Ux=y$. Evaluaţi numărul operaţiilor de maşină necesare determinării lui y, apoi lui x.

c) De ce odată efectuată eliminarea gaussiană asupra matricei A - rezolvarea altui sistem cu matricea A trebuie să fie făcută ca la punctul b, nu reluând procesul de eliminare ?

§4. Necesitatea permutărilor în procesul de eliminare. Efectul erorilor de rotunjire

După cum am văzut în §3, matricea A a sistemului 2.1 se putea descompune în produsul $A=LU$. Acest fapt se datorează anumitor ipoteze (restrictive) pe care le-am făcut, anume ca cei doi pivoţi a_{11} şi a'_{22} să fie nenuli.

Dar iată cazul sistemului

$$\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}.$$

Înmulţirea primei linii cu un număr, urmată de scăderea ei dintr-a doua linie, nu produce anularea elementului aflat în poziţia (2,1). Zeroul dorit se poate obţine, aici, numai prin **permutarea** celor două ecuaţii.

Forma triunghiulară căutată va fi

$$\begin{cases}4x_1+3x_2=b_2,\\ \quad 2x_2=b_1.\end{cases}$$

Matricea sistemului, $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}$, având elementul a_{11} nul, nu poate fi descompusă sub forma $A=LU$ (exerciţiul 1.4.a).

Înmulţind-o însă cu matricea de permutare

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

găsim

$$PA=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}=U=LU,$$

unde $L=I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ este matricea unitate de ordinul doi.

În general să observăm că, **înmulţind la stânga o matrice A cu o matrice P, obţinută din matricea unitate, de ordin corespunzător, prin permutarea anumitor linii, obţinem ca rezultat permutarea aceloraşi linii în A.**

În lucrul cu maşina de calcul, necesitatea permutărilor de linii în procesul de eliminare survine mai des decât la apariţia unor zerouri în poziţiile pivoţilor. Cauza o găsim în **"rotunjirea" numerelor.**

Fiecare maşină dispune de un sistem de înregistrare a numerelor reale numit **"virgulă mobilă"**, sistem care reţine ordinul de mărime al numărului, precum şi primele n cifre ale sale (n depinde de maşină).

De exemplu, dacă n=3, atunci numerele

12,731 12731 1273,152

sunt reţinute de maşină sub formele

$0{,}127\times10^{2}$ $0{,}127\times10^{5}$ $0{,}127\times10^{4}$.

Apar în acest fel **erori**, numite **"de rotunjire"**, care în unele situaţii defavorabile conduc la o alterare gravă a rezultatului calculelor. Analizăm două astfel de cazuri apărute în rezolvarea unor sisteme liniare.

EXEMPLUL 1:

Trebuie calculată soluţia sistemului liniar

$$A\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix},\ \text{unde } A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1{,}01\end{bmatrix},$$

în condiţiile în care termenul liber b este, la rândul său, obţinut cu erori de rotunjire.

Vom presupune astfel că în locul valorii corecte $\begin{bmatrix}2\\ 2{,}01\end{bmatrix}$ s-a obţinut valoarea rotunjită $\begin{bmatrix}2\\ 2{,}02\end{bmatrix}$. Dar în timp ce sistemul $Ax=\begin{bmatrix}2\\ 2{,}01\end{bmatrix}$ are soluţia (exactă) $x_1=x_2=1$, sistemul $Ax=\begin{bmatrix}2\\ 2{,}02\end{bmatrix}$ are soluţia exactă $x_1=0, x_2=2$.

NOTĂ. Erorile se evaluează prin valori absolute şi (mai semnificativ) prin valori relative; spre exemplu b_2=2,02 conţine o **eroare absolută** de 0,01 şi o **eroare relativă** de 0,5%. Considerând drept soluţie corectă a problemei vectorul $x=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, cea obţinută în urma alterării lui b_2, va conţine erori relative de 100%. Este o valoare inacceptabilă chiar şi în condiţiile unui calcul cu precizie scăzută.

Fenomenul urmărit se datorează caracteristicilor matricei $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1{,}01\end{bmatrix}$. Ea "amplifică" exagerat de mult erorile conţinute în termenul liber b şi poartă, de aceea, numele de **"prost condiţionată"**.

În principiu, **va trebui evitată rezolvarea, prin oricare metodă, a unor sisteme cu o astfel de matrice.**

EXEMPLUL 2
Sistemul liniar

$$\begin{bmatrix}0{,}0001 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

nu are matricea prost condiţionată. Să-l rezolvăm prin metoda Gauss **fără permutări** de ecuaţii. Înmulţind prima ecuaţie cu $m_{21}=1/0.0001=10^4$, o scădem din a doua ecuaţie care devine

$$-9999x_2=-9998.$$

Reamintindu-ne că maşina pe care o avem în vedere reţine numai primele 3 cifre şi ordinul de mărime, ecuaţia va căpăta forma

$$-9990x_2=-9990, \text{ de unde } x_2=1.$$

Substituind în prima ecuaţie valoarea astfel obţinută, găsim

$$0{,}0001x_1+1=1, \text{ de unde } x_1=0.$$

Soluţia corectă a sistemului dat este cu totul alta şi anume

$$x_1=\frac{10000}{9999}\ ,\quad x_2=\frac{9998}{9999}\ (!).$$

Dacă permutăm ecuaţiile **la început**

$$\begin{cases}x_1+x_2=2\\0{,}0001x_1+x_2=1\end{cases}$$

înmulţirea primeia cu $m_{21}=10^{-4}$ şi scăderea ei dintr-a doua, ne va conduce la

$$0{,}9999x_2=0{,}9998,$$

trunchiată de maşină la

$$0{,}999x_2=0{,}999,$$

deci $x_2=1$.
Substituind în prima ecuaţie, care de data aceasta este

$$x_1+x_2=2,$$

găsim $x_1+1=2$, deci $x_1=1$.
Comparaţi această nouă "soluţie de maşină" cu cea adevărată.

RECOMANDĂRI. *Metoda Gauss poate fi utilizată cu succes în rezolvarea unei probleme pe maşina de calcul numai în cazul când matricea sistemului nu este*

prost condiţionată, iar în cazul când este bine condiţionată, dacă pivoţii transformărilor efectuate în procesul de eliminare nu sunt numere prea mici (**în modul**!) *în raport cu celelalte elemente ale matricei. Acest ultim deziderat poate fi atins prin permutări de ecuaţii premergătoare fiecărei etape a eliminării, permutări prin care, pe locul pivotului etapei, este adus elementul de modul maxim printre cele aflate pe aceeaşi coloană cu acesta şi dedesubtul său.*

EXERCIŢIUL 1.4

a) Explicaţi de ce este imposibilă o descompunere de forma

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ m_{21} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ 0 & a'_{22}\end{bmatrix} \text{ pentru matricea } A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}.$$

b) Se consideră sistemul liniar

$$\begin{bmatrix}1 & 10000\\ 1 & 0{,}0001\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10000\\ 1\end{bmatrix}.$$

(i) Determinaţi prin metoda Gauss "soluţia" cu ajutorul maşinii care reţine primele trei cifre semnificative şi ordinul de mărime al fiecărui număr.

(ii) Determinaţi apoi soluţia exactă şi comparaţi-o cu cea găsită anterior. (Permutarea celor două ecuaţii ale sistemului nu îmbunătăţeşte soluţia găsită la punctul (i).)

(iii) Multiplicând prima ecuaţie cu 0,0001 se obţine sistemul echivalent

$$\begin{bmatrix}0{,}0001 & 1\\ 1 & 0{,}0001\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}.$$

Determinaţi prin metoda Gauss cu alegerea pivotului şi utilizând maşina de la punctul (i), "soluţia" noului sistem. Comparaţi-o cu cea exactă.

REMARCĂ. Operaţia de multiplicare a primei ecuaţii face parte dintr-un procedeu numit **echilibrarea** sistemului care se adaugă procedeului de alegere a pivotului, în scopul de a îmbunătăţi precizia de calcul.

§5. Descompunerea *PA=LU*

În cazul procesului de eliminare cu permutări de linii, matricea sistemului nu admite descompunerea $A=LU$. Cu toate acestea, putem obţine o astfel de descompunere pentru matricea $A'=PA$ obţinută din A prin permutările de linii. Aici P, numită **matrice de permutare**, se obţine din matricea unitate de acelaşi ordin cu A prin respectivele permutări de linii efectuate în procesul de eliminare.

Aşadar vom avea $A'=LU$ şi combinând cele două relaţii, $PA=LU$.

Vom explica **metoda practică prin care putem găsi** - în urma efectuării procesului Gauss şi **fără alte calcule suplimentare** - **factorii** P, L şi U din această descompunere. Într-un algoritm de calcul bazat pe metoda Gauss, zerourile produse sub pivoţi, ca rezultat al trasformărilor procesului, nu se înregistrează în memoria maşinii (ar ocupa-o inutil!). În locul fiecăruia din ele este înregistrat multiplicatorul utilizat la producerea sa. De exemplu, după prima etapă a procesului descris în §1, memoria maşinii va conţine în locul lui A, matricea

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ m_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ m_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{bmatrix},$$

iar după a doua etapă, matricea

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ m_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ m_{31} & m_{32} & a''_{33} \end{bmatrix}.$$

Izolarea multiplicatorilor de coeficienţii sistemului nu ridică probleme, ei aflându-se permanent sub diagonala matricei. În schimb, acest mod de lucru prezintă următorul avantaj: multiplicatorii utilizaţi în procesul de eliminare corespunzător matricei A sunt aceiaşi cu cei utilizaţi în cazul matricei $A'=PA$, căci transformările efectuate sunt aceleaşi - în schimb ordinea utilizării lor nu mai este, în general, aceeaşi. Factorul L din descompunerea $A'=LU$ va conţine exact multiplicatorii lui A, dar într-o ordine care diferă de ordinea utilizării lor în procesul de reducere a lui A. Cu toate acestea, triunghiul inferior al matricei păstrate în memorie redă fidel ordinea multiplicatorilor corespunzătoare procesului de reducere a lui A'. Motivul? Asupra matricei păstrate în memorie se efectuează nu numai transformările Gauss, ci şi **permutările de linii**, ceea ce asigură repoziţionarea corespunzătoare a multiplicatorilor înregistraţi în ea.

CONCLUZIE. Pentru a obţine descompunerea $PA=LU$ a unei matrice date A, efectuăm transformările procesului de eliminare asupra liniilor matricei A şi **aşezăm în locul fiecărui zero produs (sub diagonală) multiplicatorul utilizat la producerea lui. Permutările necesare de linii le efectuăm, simultan, în matricea astfel obţinută şi în matricea unitate de ordin corespunzător.**

În final ajungem la o matrice din care extragem:
- triunghiul inferior (fără diagonală) + diagonala unitară = L;
- triunghiul superior(inclusiv diagonala) = U.

Notând cu P matricea permutărilor, are loc relaţia:

$$\boxed{PA=LU}.$$

(5.1) EXEMPLU

Procesul de eliminare corespunzător matricei

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

este alcătuit din următoarele transformări:

$$A \underset{m_{21}=-2}{\overset{E_{21}}{\to}} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix} \underset{m_{31}=3}{\overset{E_{31}}{\to}} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} \overset{P_{23}}{\to} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Aici $m_{32}=0$, iar matricea de permutare

$$P=P_{23}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dar observăm că

$$PA=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 9 & 0 & 5 \\ -6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & & \\ m_{21} & 1 & \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ & 6 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix} = LU\ .$$

Cauza? Permutarea efectuată la pasul al treilea modifică ordinea în care vor trebui utilizaţi multiplicatorii m_{21} şi m_{31}, atunci când în locul matricei A vom lucra cu $A'=P_{23}A$. Noii multiplicatori vor fi $m'_{21}=m_{31}$ şi $m'_{31}=m_{21}$, astfel încât matricea multiplicatorilor pentru $A'=PA$ va fi

$$L'=\begin{bmatrix} 1 & & \\ m'_{21} & 1 & \\ m'_{31} & m'_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 3 & 1 & \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculul poate fi aranjat astfel:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -6 & 4 & 3 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix} \overset{E_{21}}{\to} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ m_{21} & 0 & 5 \\ 9 & 0 & 5 \end{bmatrix} \overset{E_{31}}{\to} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ m_{21} & 0 & 5 \\ m_{31} & 6 & 2 \end{bmatrix} \overset{P_{23}}{\to} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ m_{31} & 6 & 2 \\ m_{21} & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

de unde extragem

$$L=\begin{bmatrix} 0 & & \\ m_{31} & 0 & \\ m_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 3 & 1 & \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ şi } U=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ & 6 & 2 \\ & & 5 \end{bmatrix}.$$

EXERCIŢIUL 1.5

Urmând metoda descrisă în paragraf şi exemplul de mai sus, efectuaţi procesul de eliminare şi extrageţi descompunerea $A=LU$, respectiv $PA=LU$, pentru următoarele matrice:

a) $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, b) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 7 & -15 & 13 \end{bmatrix}$, c) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

§6. Indicaţii practice pentru aplicarea metodei Gauss

Metoda eliminării succesive a necunoscutelor este practică şi eficientă, de aceea larg utilizată în aplicaţii. Prezentăm, în continuare, modul de organizare a calculului.

6.1. Metoda Gauss aplicată mai multor sisteme cu aceeaşi matrice. Utilizarea descompunerii LU

Rezolvând două sau mai multe sisteme cu aceeaşi matrice şi termeni liberi diferiţi $Ax=b$, $Ax=c$ etc, *procesul de eliminare* trebuie realizat **o singură dată**, căci transformările depind numai de coeficienţii matricei A. Pentru aceasta, aşezăm într-o singură matrice, întâi coloanele lui A, apoi pe b, c etc. asfel

$$[A|\ b|\ c...].$$

Prin transformări efectuate asupra liniilor acestei matrice, aducem pe A la forma triunghiulară U. Matricea devine

$$[U|\ b'|\ c'...],$$

iar sistemele corespunzătoare $Ux=b'$, $Ux=c'$ etc., respectiv echivalente cu sistemele iniţiale, se rezolvă prin substituţii.

Inversarea unei matrice (nesingulare) conduce la aplicarea acestei scheme de calcul.

EXEMPLU

Fie A matrice 3×3. A^{-1} va avea aceleaşi dimensiuni, iar coloanele sale – ce urmează a fi determinate – le notăm x, y, z. Deci

$$A^{-1}=[x\,|\,y\,|\,z] \text{ şi } A\,[x\,|\,y\,|\,z]=[e_1\,|\,e_2\,|\,e_3]$$

(prin e_1,e_2,e_3 am notat coloanele matricei unitate de ordinul trei I_3).
În baza exerciţiului 1.2.d,

$$A\,[x|\ y|\ z] = [Ax|\ Ay|\ Az],$$

inversarea fiind echivalentă cu rezolvarea, în acest caz, a trei sisteme liniare cu **aceeaşi matrice**. Schema eficientă de calcul a coloanelor x, y, z va fi cea descrisă anterior.[1]

NOTĂ. În anumite cazuri, deşi avem de rezolvat mai multe sisteme liniare cu aceeaşi matrice $Ax=b$, $Ay=c$ etc, nu cunoaştem la început decât primul termen liber b, iar c urmează a fi determinat pe baza soluţiei x. Schema de calcul anterior descrisă nu mai funcţionează. Stocând în memoria maşinii descompunerea LU a matricei A, precum şi permutările efectuate în procesul de eliminare, am stocat de fapt transformările procesului Gauss care, depinzând doar de coeficienţii matricei A, sunt aceleaşi pentru fiecare din sistemele date. Sistemelor $LUy=Pc$ şi celelalte, li se vor aplica procedeul de determinare a soluţiei descris în exerciţiul 1.3.b.

EXERCIŢIUL 1.6.1

a) Aplicând o singură dată transformările procesului de eliminare Gauss, determinaţi soluţiile sistemelor $Ax=b$, $Ay=c$, unde

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&6\\3&7&7\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}2\\4\\4\end{bmatrix}.$$

---

[1] Se arată că numărul "operaţiilor de maşină", va fi în acest caz de (aproximativ) n^3, pentru o matrice de ordinul n.

b) Bazându-vă pe rezultatul exerciţiului 1.3.a, explicaţi de ce determinarea soluţiei sistemului $Ax=b$ prin formula $x=A^{-1}b$ este neconvenabilă din punct de vedere al numărului operaţiilor de maşină cheltuite.

6.2. *Varianta Gauss-Jordan a algoritmului de eliminare succesivă a necunoscutelor*

Transformările efectuate în cadrul metodei de eliminare Gauss, au ca scop obţinerea de zerouri sub diagonala matricei sistemului (sistemul triunghiular obţinut rezolvându-se prin substituţii succesive). Varianta Gauss-Jordan constă din continuarea seriei de transformări pentru obţinerea de zerouri şi deasupra diagonalei. Iată, de pildă, cum *continuă acest proces în cazul* matricei A din exemplul 5.1; reamintim că:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ -6 & 4 & 3\\ 9 & 0 & 5\end{bmatrix}\to\ldots\to\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}=U.$$

Înmulţind linia a treia cu 2/5, respectiv 1/5, o scădem din a doua, respectiv prima linie; apoi înmulţind linia a doua cu –2/6, o scădem din prima. Matricea A se va transforma într-una diagonală = matricea pivoţilor:

$$D=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 6 & \\ & & 5\end{bmatrix}.$$

Sistemul $Ax=b$, devenit $Ux=c$, apoi $Dx=d$ (prin transformările corespunzătoare), se rezolvă în final prin trei împărţiri.

Această variantă de calcul, combinată cu cea descrisă în §6.1 pentru determinarea coloanelor inversei, poartă denumirea de **algoritmul Gauss-Jordan de inversare** a unei matrice. Iată desfăşurarea sa completă în cazul matricei A de mai sus:

$$[A\mid I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -6 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 9 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\ldots\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ & 6 & 2 & -3 & 0 & 1\\ & & 5 & 2 & 1 & 0\end{array}\right]\to$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}3 & -2 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ & 6 & 0 & -\frac{19}{5} & -\frac{2}{5} & 1\\ & & 5 & 2 & 1 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}3 & & & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ & 6 & & -\frac{19}{5} & -\frac{2}{5} & 1\\ & & 5 & 2 & 1 & 0\end{array}\right].$$

Împărţind liniile cu 3, 6 şi respectiv 5, rezultă sisteme echivalente cu

$$Ax=e_1, Ay=e_2, Az=e_3:$$

$$Ix=\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} \\ -\frac{19}{30} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix},\ Iy=\begin{bmatrix} -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix},\ Iz=\begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{bmatrix};\ A^{-1}=\begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{19}{30} & -\frac{1}{15} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

EXERCIŢIUL 1.6.2

a) Determinaţi, pe baza algoritmului Gauss-Jordan, inversa matricei

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Aplicaţi algoritmul Gauss-Jordan pentru determinarea inversei matricei singulare $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ şi constataţi "blocarea" sa.

c) Justificaţi – pe baza algoritmului Gauss-Jordan de inversare (fără permutări) – următoarele proprietăţi:

i) **Inversa unei matrice diagonale este o matrice de acelaşi tip;**

ii) **Inversa unei matrice superior (inferior) triunghiulare avînd 1 pe diagonală este o matrice de acelaşi tip.**

§7. Metoda diferenţelor finite

Rezolvarea sistemelor liniare este doar o verigă intermediară în găsirea soluţiei unor probleme complexe pe care le ridică practica inginerească. Între acestea, menţionăm **problemele la limită**, din care alegem următorul exemplu ilustrativ:

(7.1) *Să se determine funcţia* $u(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ *de două ori derivabilă şi care:*

(i) *pentru fiecare* $x\in[0,1]$ *satisface ecuaţia diferenţială*

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=f(x)$$

(aici $f(x):[0,1]\to\mathbb{R}$ este o funcţie cunoscută);

(ii) *verifică* $u(0)=0$, $u(1)=0$*; aceste condiţii la capetele intervalului poartă numele de condiţii "la limită".*

Problema are drept necunoscută funcţia $u(x)$, ceea ce înseamnă de fapt o infinitate de necunoscute - valorile pe care $u(x)$ le ia în intervalul [0,1].

Determinarea unei soluţii impune reducerea la un număr finit de necunoscute, i.e. la o **problemă finit dimensională**, reducere ce se numeşte **discretizare.**

Pentru a face discretizarea am ales metoda, larg întrebuinţată, a **diferenţelor finite**. Ea constă in înlocuirea necunoscutei $u(x)$ prin vectorul n - dimensional $u_1,\dots,u_n$ al valorilor sale în n puncte distincte $x_1,x_2,\dots,x_n\in(0,1)$.

Derivata $\frac{d^2u}{dx^2}$ se va calcula **aproximativ** şi anume, presupunând $x_k - x_{k-1}=h$ (const.) pentru $k=\overline{1,n+1}$ (aici $x_0=0, x_{n+1}=1$) unde $h=\frac{1}{n+1}$ este "pasul", vom aproxima

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x_k)\approx\frac{u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}}{h^2}$$ (cf. exerciţiului 1.7).

Scrisă în cele n noduri intermediare $x_1=h,\ldots,x_n=nh$, ecuaţia diferenţială (i) furnizează următoarele n egalităţi

(7.2) $$-u_{k+1}+2u_k-u_{k-1}=h^2f(kh)\ ,\ k=\overline{1,n}$$

Pe baza condiţiilor (ii), u_0 şi u_{n+1} sunt 0, iar egalităţile 7.2 reprezintă un sistem de n ecuaţii cu n necunoscute $u_1,\ldots,u_n$.

De exemplu, când n=5:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix}=h^2\begin{bmatrix} f(h) \\ f(2h) \\ f(3h) \\ f(4h) \\ f(5h) \end{bmatrix}.$$

Matricea sistemului este **tridiagonală**, căci elementele nenule se află doar pe diagonala principală şi cele două adiacente ei. Ea este şi **simetrică**, adică $a_{12}=a_{21}, a_{23}=a_{32}$ etc. Această matrice se numeşte **matricea diferenţelor finite de ordinul al doilea**[1].

Rezolvând sistemul 7.2 găsim valorile u_k. Ele vor fi cu atât mai apropiate de $u(x_k)$ cu cât h este mai mic (şi derivata $\frac{d^2u}{dx^2}(x_k)$ este mai bine aproximată), deci cu cât n este mai mare. Apare astfel necesitatea rezolvării unor sisteme cu sute, chiar mii, de ecuaţii şi necunoscute.

EXERCIŢIUL 1.7
Deoarece

$$u'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x)-u(x-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h},$$

derivata, $u'(x)$, poate fi aproximată, pentru h mic, cu oricare din rapoartele de mai sus.

---

[1] I se spune astfel deoarece, prin înmulţirea (la dreapta) cu vectorul coloană (u_i) îl transformă pe acesta în vectorul coloană $(u_{i+1}-2u_i+u_{i-1})$ numit "al diferenţelor finite de ordinul al doilea". Această matrice joacă - pentru vectorii finit dimensionali - rolul pe care operatorul de derivare de ordinul al doilea îl joacă pentru funcţii.

Similar, pentru h mic, deoarece

$$u''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$$

vom putea aproxima

$$u''(x)\approx\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}.$$

Verificaţi, prin calcul, limitele de mai sus.

§8. Simetrizarea descompunerii $A=LU$ pentru matricele simetrice. Descompunerea $A=LDL^T$

Aşadar problema determinării valorilor necunoscute $u(x)$ s-a redus la problema rezolvării unui sistem liniar $n\times n$ având ca matrice - matricea diferenţelor finite de ordinul al doilea, iar termenul liber depinzând de membrul drept, $f(x)$, al ecuaţiei diferenţiale.

Eliminarea succesivă a necunoscutelor acestui sistem revine, matriceal, la descompunerea LU a matricei diferenţelor finite de ordinul al doilea. Din calcul, pentru n=5:

(8.1)
$$A=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & & \\ & -\frac{2}{3} & 1 & & \\ & & -\frac{3}{4} & 1 & \\ & & & -\frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ & \frac{3}{2} & -1 & & \\ & & \frac{4}{3} & -1 & \\ & & & \frac{5}{4} & -1 \\ & & & & \frac{6}{5} \end{bmatrix}=LU\ .$$

Datorită simetriei matricei A, vom putea aranja această descompunere într-o formă simetrică intercalând un factor diagonal D - matricea diagonală a pivoţilor lui A - între cele două matrice triunghiulare.

Mai precis, descompunem

(8.2)
$$U=\begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & \frac{3}{2} & & & \\ & & \frac{4}{3} & & \\ & & & \frac{5}{4} & \\ & & & & \frac{6}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ & 1 & -\frac{2}{3} & & \\ & & 1 & -\frac{3}{4} & \\ & & & 1 & -\frac{4}{5} \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Ultimul factor este matricea ce poate fi obţinută din L prin transformarea liniilor în coloane, operaţie numită **transpunere**. O vom nota prin L^T. Am obţinut aşadar descompunerea

(8.3)
$$A=LDL^T.$$

Avantajul acestei *descompuneri* este în primul rând de ordin practic: ocupă în memoria maşinii de calcul aproximativ *jumătate* din spaţiul ocupat de descompunerea nesimetrică LU (triunghiul superior nu mai trebuie stocat!).

EXERCIŢIUL 1.8

Construiţi descompunerea simetrică LDL^T pentru matricea simetrică $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

Indicaţie. Construiţi mai întâi descompunerea LU, apoi descompuneţi factorul U conform procedeului descris mai sus.

§9. Descompunerea *LDU* pentru matrici nesingulare şi unicitatea sa

Orice matrice superior triunghiulară şi nesingulară U se poate descompune în produsul dintre o matrice diagonală şi una superior triunghiulară cu 1 pe diagonală, astfel

$$\textbf{(9.1)} \qquad \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ & & \dots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & & & \\ & u_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/u_{11} & u_{13}/u_{11} & \dots & u_{1n}/u_{11} \\ & 1 & u_{23}/u_{22} & \dots & u_{2n}/u_{22} \\ & & & \dots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare orice descompunere $A=LU$ se poate transforma, pentru matricele nesingulare – într-o descompunere $A=LDU$. Un caz important este cel al matricelor A simetrice, când $U=L^T$. Egalitatea celor doi factori este consecinţa **unicităţii** descompunerii LDU. Vom demonstra:

(9.2) TEOREMĂ. *Dacă $A=L_1D_1U_1$ şi $A=L_2D_2U_2$ sunt două descompuneri ale lui A astfel încât factorii L_i şi U_i sunt matrice inferior, respectiv superior, triunghiulare cu 1 pe diagonală, iar D_1,D_2 sunt matrice diagonale (nesingulare) atunci*

$$L_1=L_2, D_1=D_2, U_1=U_2.$$

Demonstraţie: În egalitatea

$$L_1D_1U_1=L_2D_2U_2$$

cele 6 matrice sunt nesingulare. Rezultă

$$U_1U_2^{-1}=D_1^{-1}L_1^{-1}L_2D_2.$$

Vom utiliza în continuare câteva proprietăţi pe care le propunem drept exerciţii:

(a) inversa (cf. exerciţiului 1.6.2.c) şi produsul a două matrice superior triunghiulare având 1 pe diagonală sunt matrice de aceeaşi formă;

(b) aceeaşi în cazul matricelor inferior triunghiulare;

(c) produsul între o matrice diagonală şi una inferior triunghiulară este o matrice inferior triunghiulară.

Revenim asupra ultimei egalităţi. Cf. (a) membrii săi sunt superior triunghiulari cu 1 pe diagonală. Cf. (b) şi (c) ei sunt inferior triunghiulari. Cele două condiţii conduc la matricea unitate. De unde

$$U_1U_2^{-1}=I \ ,D_1^{-1}L_1^{-1}L_2^{-1}D_2=I, \text{ deci } U_1=U_2,\ L_1^{-1}L_2=D_1D_2^{-1}.$$

Ultima egalitate şi proprietatea (b) implică $L_1^{-1}L_2=I$, deci $L_1=L_2$. În final $D_1=D_2$. ■

* *
*

Condiţia ca A să fie simetrică se poate exprima sub forma $A^T=A$.

Vom enunţa acum o proprietate importantă a operaţiei de transpunere - regula de transpunere a produsului de matrice

$$(AB)^T=B^TA^T$$

(reamintim că această inversare a ordinei factorilor apare şi în regula de inversare a unui produs de matrice nesingulare: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$).

Aplicând această regulă de transpunere unui produs de trei factori obţinem

$$(LDU)^T=U^TD^TL^T.$$

În cazul când produsul $LDU=A$ este o matrice simetrică, va rezulta

$$LDU=U^TD^TL^T,$$

deci, datorită teoremei demonstrate:

$$L=U^T,\ D=D^T,\ U=L^T.$$

* *
*

Simetria şi **tridiagonalitatea** matricei diferenţelor finite de ordinul doi reprezintă trăsături remarcabile de simplitate ale acesteia. Este important ca metoda de rezolvare a unui sistem liniar cu o astfel de matrice să fie capabilă a exploata cât mai complet această simplitate. Mai general, acest caracter de simplitate îl au şi matricele cu un număr de elemente nenule grupate în jurul diagonalei principale, iar în rest zerouri.

De exemplu **matricele bandă**[1] au elementele nenule grupate pe câteva diagonale adiacente cu diagonala principală

---

[1] Aceste matrice fac parte dintre cele numite *rare*, în care predomină elementele nule. Pentru ele există algoritmi special adaptaţi.

Dacă nu necesită permutări, descompunerea LU a unei astfel de matrice va fi de forma

Altfel spus, ***algoritmul Gauss fără permutări păstrează structura de bandă a matricei***, fiind indicat în rezolvarea unor sisteme de acest tip.

EXERCIŢIUL 1.9

a) Presupunând $a \neq 0$, aplicaţi prima etapă a procesului de eliminare matricei simetrice

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

pentru a arăta că submatricea de ordinul doi obţinută în colţul din dreapta jos va fi **simetrică**. Astfel, se poate constata că, în absenţa permutărilor, **simetria se conservă** la fiecare etapă a procesului Gauss. Ce consecinţă poate avea acest fapt la rezolvarea unui sistem cu matricea simetrică?

b) Calculaţi inversa matricei diferenţelor finite de ordinul al doilea când $n=3$, pentru a constata că ea **nu este bandă**. În practică **nu se recomandă calcularea inversei unei astfel de matrice**.

§10. Rezolvarea sistemelor cu m ecuaţii şi n necunoscute (dreptunghiulare)

Metoda eliminării se poate aplica sistemelor liniare $m \times n$. Iată un

(10.1) EXEMPLU

Sistemul $Ax=b$ are matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

şi termenul liber

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Aşadar conţine 3 ecuaţii cu 4 necunoscute: x_1,x_2,x_3,x_4. Notăm cu $\overline{A}=[A|\ b]$ matricea sa extinsă. Amplificând prima ecuaţie (linie) cu $m_{21}=2$ şi scăzând-o din a doua, apoi cu $m_{31}=1$ şi scăzând-o din a treia, obţinem sistemul echivalent, cu matricea extinsă

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & b_3-b_1 \end{array}\right].$$

Amplificând a doua ecuaţie cu $m_{32}=-1/3$ şi scăzând-o din ultima găsim

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3-5b_1/3+b_2/3 \end{array}\right].$$

Acest ultim sistem are **matricea în scară**, adică în această matrice
(i) *fiecare linie nenulă începe cu mai multe zerouri decât linia precedentă şi*
(ii) *fiecare (eventuală) linie nulă se află sub cele nenule.*
Numim **pivot**, al unei matrice în scară, primul (începând din stânga) element nenul al fiecărei linii nenule; (aici ei sunt 1 şi -3).
Pentru ca sistemul liniar corespunzător ultimei matrice, să fie **compatibil**, este necesar (şi suficient) ca în ultima sa ecuaţie termenul liber să fie nul. De unde

(10.2) **CRITERIU.** *Un sistem liniar m×n având matricea extinsă în scară este **compatibil** dacă şi numai dacă în coloana termenilor liberi nu există pivot.*

Sistemul de mai sus este compatibil când $b_3-5b_1/3+b_2/3=0$. Pentru a-l "rezolva" – deoarece admite o infinitate de soluţii - alegem drept **parametri** sau **necunoscute secundare - necunoscutele corespunzătoare coloanelor fără pivot**. Ele sunt x_2 şi x_4. Trecându-le în membrii drepţi, sistemul devine

$$\begin{cases} x_1+2x_3=b_1+2x_2-2x_4, \\ -3x_3=b_2-2b_1+6x_4. \end{cases}$$

Fiind triunghiular, se rezolvă prin substituţii (cf. §1) şi obţinem pe rând

$$x_3=\frac{2b_1-b_2}{3}-2x_4\ ,\ x_1=\frac{2b_2-b_1}{3}+2x_2+2x_4.$$

În final, **soluţia generală** a sistemului dat va fi (pentru orice $x_2,x_4\in\mathbb{R}$):

$$\left(\frac{2b_2-b_1}{3}+2x_2+2x_4,x_2,\frac{2b_1-b_2}{3}-2x_4,x_4\right)^T.$$

O vom descompune în suma de coloane

$$\left(\frac{2b_2-b_1}{3},0,\frac{2b_1-b_2}{3},0\right)^T+(2x_2+2x_4,x_2,-2x_4,x_4)^T$$

unde: prima coloană depinde de termenul liber $(b_1,b_2,b_3)^T$ şi reprezintă **soluţia particulară** obţinută pentru valorile $x_2=x_4=0$ ale parametrilor, iar a doua coloană este, la rândul ei, o soluţie generală, dar nu pentru sistemul dat, ci

pentru un sistem obţinut din acesta făcând $b_1=b_2=b_3=0$ şi care se numeşte **sistemul omogen corespunzător** sistemului dat.

"Soluţia generală omogenă"

$$(2x_2+2x_4,x_2,-2x_4,x_4)^T$$

se descompune în suma unui număr de coloane egal cu numărul de parametri. În cazul de faţă iată descompunerea respectivă

$$x_2(2,1,0,0)^T+x_4(2,0,-2,1)^T.$$

Ea se numeşte **combinaţia liniară** a celor două coloane cu coeficienţii x_2 şi x_4.

Fiecare din cele două coloane de numere reprezintă coloana coeficienţilor câte unui parametru din soluţia generală iniţială. Împreună, vor purta numele de **sistem fundamental** de soluţii pentru sistemul liniar omogen $Ax=0$ corespunzător sistemului dat, $Ax=b$.

Din analiza acestui caz se desprind următoarele

(10.3) CONCLUZII GENERALE

1) **Soluţia generală** a unui sistem liniar şi neomogen $Ax=b$ compatibil **este suma între o soluţie particulară neomogenă şi** soluţia generală a sistemului $Ax=0$, i.e. **soluţia generală omogenă corespunzătoare.**

2) **Numărul parametrilor** de care depinde soluţia generală (omogenă şi neomogenă) **este** egal cu diferenţa **n–r** între numărul **n** al necunoscutelor şi numărul **r** al pivoţilor (rangul).

3) **Soluţia generală a sistemului omogen** $Ax=0$ corespunzător, **este combinaţia liniară a** celor n–r coloane ale **sistemului fundamental de soluţii** cu coeficienţi-parametrii.

(10.4) **PROPRIETATE.** *Orice sistem liniar şi omogen având mai puţine ecuaţii decât necunoscute are şi soluţii diferite de soluţia nulă.*

Demonstraţie: Întrucât numărul pivoţilor oricărei matrice în scară este mai mic sau egal cu numărul liniilor – aici strict mai mic decât cel al necunoscutelor – va rezulta, cf. concluziilor 2 şi 3, că sistemul fundamental conţine $n-r>0$ soluţii particulare, fiecare diferită de soluţia nulă (deoarece, conţinând coeficienţii unui parametru din soluţia generală, o astfel de soluţie particulara va avea 1 pe poziţia corespunzătoare necunoscutei secundare respective; vezi exemplul anterior). ■

Criteriul de compatibilitate 10.2 este util, dar puţin important din punct de vedere teoretic. Formulăm în continuare un criteriu bazat pe o noţiune-teoretic fundamentală – aceea de **spaţiu vectorial** (al coloanelor matricei A).

(10.5) **DEFINIŢIE.** *Se numeşte* ***spaţiul vectorial al coloanelor matricei*** *A, notat $\mathcal{S}(A)$, mulţimea tuturor combinaţiilor liniare cu coloanele matricei A.*

În cazul matricei sistemului liniar considerat, alcătuită din patru coloane, această mulţime va conţine **toate** combinaţiile liniare

$$x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+x_4a_4,\quad x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{R}.$$

Este vorba aşadar, de o mulţime cu o **infinitate** de coloane. Pentru a da o reprezentare compactă elementelor sale este bine să utilizăm scrierea combinaţiilor liniare de coloane ca produs dintre matricea A şi coloana x a coeficienţilor combinaţiei (vezi §2). Pe scurt

$$b=(b_1,b_2,b_3)^T\in\Im(A)\Leftrightarrow\exists x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T:\ b=Ax.$$

Dar condiţia din dreapta simbolului "$\Leftrightarrow$" este exact compatibilitatea sistemului $Ax=b$. Deci:

(10.6) **CRITERIU:** *Un sistem liniar este compatibil d.n.d. termenul său liber aparţine spaţiului vectorial al coloanelor matricei sale.*

Relevanţa teoretică a acestui criteriu stă în faptul că el utilizează spaţiul vectorial de coloane, deci un tip particular de spaţiu vectorial şi această ultimă noţiune este însăşi cheia de boltă a algebrei liniare.

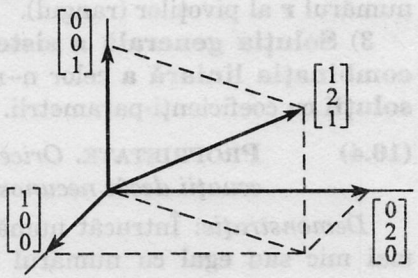
Înainte de a încheia paragraful şi capitolul, nu este lipsit de importanţă să remarcăm **originea geometrică şi fizică** a noţiunii de spaţiu vectorial.

Vom reprezenta geometric spaţiul $\Im(A)$, respectiv combinaţiile liniare ale coloanelor matricei din exemplul anterior.

Reamintim că pe o dreaptă – transformată în **axă** prin alegerea unei origini, sens (pozitiv) şi a unei unităţi de măsură – putem reprezenta toate numerele reale (axa reală).

Trei axe reale, perpendiculare două câte două, cu originea şi unitatea de măsură comune, formează un **sistem de axe**.

Reprezentăm într-un astfel de sistem, prima coloană din A: $(1,2,1)^T$, identificând-o cu punctul de coordonate 1,2,1, sau mai potrivit cu săgeata (**vectorul**) ce uneşte originea cu acest punct.



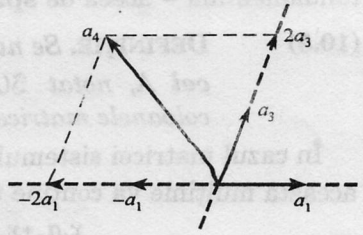
Să observăm că descompunerea

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

corespunde geometric descompunerii diagonalei unui paralelipiped în suma vectorială a laturilor sale.

Apare astfel legătura dintre Algebră, Geometrie şi Fizică (deoarece suma vectorială este legea de compunere a forţelor, vitezelor, etc.). Orice relaţie algebrică între coloanele lui A are o semnificaţie geometrică şi fizică.

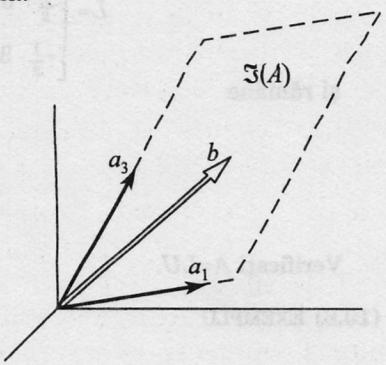
Astfel, între primele două coloane ale matricei din exemplu, relaţia $a_2=-2a_1$ înseamnă **coliniaritatea** lor, iar între ultimele trei coloane, relaţia $a_4=a_2+2a_3$ înseamnă ***coplanaritatea*** lor.



Combinaţia liniară $x_1a_1+x_2a_2+x_3a_3+x_4a_4$, a coloanelor lui A, devine, utilizând aceste relaţii,

combinaţia $(x_1-2x_2-2x_4)a_1+(x_3+2x_4)a_3$ a celor corespunzătoare pivoţilor; aşadar un vector în **planul** determinat de acestea două.

Acest plan va reprezenta geometric spaţiul $\mathfrak{I}(A)$.



Criteriul 10.6 capătă astfel – pentru matricea din exemplu – următoarea formulare:

"Sistemul $Ax=b$ este compatibil d.n.d. termenul său liber b se află aşezat în planul determinat de coloanele matricei A."

* *
*

Ca şi în cazul matricelor pătrate, reducerea la o **formă în scară** (prescurtat: **f.s.**) U a matricei dreptunghiulare A conduce, fără alte calcule suplimentare, la o descompunere $PA=LU$ unde P este matricea obţinută din matricea unitate prin efectuarea permutărilor necesare de linii, iar L este matricea pătrată a multiplicatorilor procesului în ordinea dictată de permutări (conform §2 şi §5).

Iată,pentru o mai bună înţelegere a metodei, două exemple de reducere tratate complet:

(10.7) EXEMPLU

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix};$$

înmulţind prima linie cu $m_{21}=1/2$ şi $m_{31}=-1/2$, o scădem din a doua, respectiv a treia linie:

$$A \to \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 3 & \frac{9}{2} \end{bmatrix};$$

în poziţii corespunzătoare, aflate sub diagonala matricei, am aşezat multiplicatorii utilizaţi, deşi ei nu fac parte din A. Înmulţim linia a doua cu $m_{32}=3$ şi o scădem din a treia:

$$A \to \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

unde am aşezat multiplicatorul m_{32} pe poziţia corespunzătoare.

Extrăgând de sub diagonală triunghiul de jos al lui L, rezultă

$$L=\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ & 1\\ & & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\\ -\frac{1}{2} & 3 & 1\end{bmatrix}$$

şi rămâne

$$U=\begin{bmatrix}2 & -6 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Verificaţi $A=LU$.

(10.8) EXEMPLU

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -6 & -3 & 3\\ 4 & 3 & 1\\ -1 & 1 & 5\end{bmatrix};$$

înmulţim prima linie cu $m_{21}=-3$, $m_{31}=2$, $m_{41}=-1/2$ şi o scădem din liniile corespunzătoare

$$A\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -3 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2}\end{bmatrix};$$

permutăm liniile 1 şi 2 (inclusiv multiplicatorii aflaţi în prima coloană, sub pivot)

$$A\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ -3 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2}\end{bmatrix};$$

înmulţind linia a doua cu $m_{42}=3/2$, o scădem din a patra

$$A\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ -3 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0\end{bmatrix}$$

(zeroul aflat pe poziţia (3,2) corespunde multiplicatorului $m_{32}=0$).
Rezultă:

$$L=\begin{bmatrix}1\\ 2 & 1\\ -3 & 0 & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 1\end{bmatrix},\ U=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

şi $P=P_{23}$, care se obţine din I_4 ,prin permutarea liniilor 2 şi 3.
Verificaţi $PA=LU$.

OBSERVAŢIE. Pentru cei doritori să transcrie această metodă într-unul din limbajele *de programare, descriem* **algoritmul general** de reducere a matricei A, cu m linii şi n coloane, la o *formă în scară:*

Pasul 1: Dacă A este o linie sau matricea nulă, atunci este în scară.

Pasul 2: În caz contrar, fie q indicele primei coloane nenule (începând din stânga) şi a_{pq} primul element nenul din coloana q (începând de sus). Permutând, dacă $p>1$, linia p cu prima linie, aducem elementul a_{pq} în poziţia a_{1q}. Apoi, prin înmulţirea primei linii cu a_{iq}/a_{1q} şi scăderea din linia i, anulăm toate elementele a_{iq} (nenule) aflate sub a_{1q}.

Pasul 3: Considerăm submatricea obţinută din A prin suprimarea primei linii şi a primelor q coloane (dacă este nevidă). Renotând-o cu A revenim la pasul 1.

EXERCIŢIUL 1.10

a) Construiţi o matrice în scară 3×5 având pivoţii în coloanele 2, 3 şi 5.

b) Considerând sistemele liniare $Ax=b$ având, pe rând, ca matrice A, pe fiecare din matricele exemplelor 10.7 şi 10.8, iar termenul liber b, cu număr corespunzător de componente, determinaţi condiţiile pe care acestea să le satisfacă pentru **compatibilitate**. (Utilizaţi 10.2).
Fixaţi parametrii de care depinde soluţia generală şi apoi determinaţi această soluţie generală descompunând-o după modelul descris în exemplul 10.1.

c) Determinaţi descompunerea $PA=LU$ a matricelor

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ şi } A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & -6 & 5 \\ -4 & 2 & 2 & -5 & 14 & -7 \\ 6 & -3 & -1 & 6 & -14 & 14 \\ -2 & 1 & 5 & -7 & 18 & -1 \\ 4 & -2 & -4 & 12 & -18 & 15 \end{bmatrix}$$

d) Forma în scară a unei matrice nu este unică. Dar acceptând între transformările prin care A este redusă la o formă în scară şi **împărţirea unei linii la un număr (nenul)**, aşa cum am făcut-o în algoritmul Gauss-Jordan (§ 6.2), putem obţine o **formă în scară canonică**, care verifică, în plus faţă de condiţiile (i) şi (ii), următoarele condiţii:
(iii) toţi pivoţii sunt 1, şi
(iv) în coloana fiecărui pivot, celelalte elemente sunt nule.
Forma în scară canonică a fiecărei matrice este **unică**.
Adaptaţi algoritmul Gauss-Jordan pentru a obţine această formă pentru fiecare matrice A din exemplele 10.1 şi 10.7.

Chestiuni recapitulative

1) Pentru ce tip de matrice pătrată A sistemul $Ax=b$ se rezolvă doar prin substituţii?

2) Ce condiţie trebuie impusă acestei matrice pentru ca soluţia sistemului dat să existe şi să fie unică ?

3) Reprezentaţi matriceal unicul pas al procesului de eliminare succesivă pentru sistemul 2×2 nesingular $Ax=b$ (presupunând $a_{11}\neq 0$).

4) Care este numărul maxim al permutărilor de linii, necesare rezolvării unui sistem liniar 3×3 ?

5) În cazul matricei diferenţelor finite de ordinul al doilea, sistemul liniar corespunzător poate fi rezolvat, prin metoda Gauss, cu relativ puţine "operaţii de maşină". Evaluaţi acest număr în cazul $n\times n$.

6) Fie A matrice 3×3. Verificaţi că produsul Ae_1, e_1 fiind prima coloană din I_3, reprezintă prima coloană din A ş.a.m.d. Ce va reprezenta produsul e_1^TA etc.? Dar $e_1^TAe_1, e_1^TAe_2$ etc.?

7) Descompuneţi sub forma simetrică LDL^T matricea simetrică tridiagonală $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

8) În cazul unui sistem liniar $m\times n$ $Ax=b$ ce relaţie, între m,n şi rangul r al matricei A, asigură compatibilitatea ?

9) Construiţi un astfel de sistem incompatibil pentru care $m<n$. Alegeţi m şi n cât mai mici cu putinţă.

10) Determinaţi matrice A pentru care numărul soluţiilor sistemului $Ax=b$ să fie:

(i) 0 sau 1, depinzând de coloana b,

(ii) ∞, oricare ar fi b,

(iii) 0 sau ∞, depinzând de b,

(iv) 1, oricare ar fi b.

11) Ce relaţie există, în fiecare din cazurile anterioare, între m, n, r ?

Capitolul 2

SPAŢII VECTORIALE ŞI APLICAŢII LINIARE

Rezumat. Spaţiul coloanelor unei matrice este una din ipostazele acestui concept cheie – de spaţiu vectorial – pe care îl vom analiza aici. După ce-i fixăm, printr-o definţie (§1) conţinutul, în cadrul teoretic astfel constituit vor prinde contur noţiunile esenţiale: **independenţa liniară** (§2) şi **baza** spaţiului (§3). Teorema 2.4.1 permite definirea **dimensiunii** spaţiului (§4). Cele patru spaţii fundamentale ale unei matrice de numere reale oferă excelente exemplificări ale acestor concepte teoretice (§5).

Aplicaţia liniară şi ipostaza sa - izomorfismul de spaţii vectoriale – este al doilea concept cheie al teoriei (§6). Teorema 6.12 explică raţiunea studierii spaţiilor K^n şi a aplicaţiilor liniare dintre ele. Matricea este modelul unei astfel de aplicaţii (§7.1), iar cazul general al aplicaţiei liniare între două spaţii vectoriale se reduce la acest model de studiu (§7.2).

Între subspaţiile lui K^n operaţiile ce produc (noi) subspaţii sunt **intersecţia** şi – în locul reuniunii – **suma** (§8.1). Problema determinării dimensiunilor şi a cîte unei baze în fiecare din noile subspaţii se rezolvă algoritmic (§8.2). Un caz particular important este cel al **sumei directe** şi anume cel în care K^n este o astfel de sumă (§8.3).

§1. Noţiunea de spaţiu vectorial de coloane

În definiţia ce urmează vor fi incluse două tipuri de spaţii vectoriale de coloane: unele reale, celelalte complexe. Notăm prin K una din mulţimile[1] $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$.

(1.1) DEFINIŢIE: Numim spaţiu vectorial (de coloane) cu scalari din K, sau peste K, o mulţime de (vectori) coloane având proprietăţile:

(1) este **nevidă**;

(2) odată cu **orice** doi vectori conţine şi **suma** lor;

(3) odată cu **fiecare** vector conţine şi vectorii obţinuţi prin înmulţirea acestuia cu scalarii din K.

În terminologia adoptată, numerele lui K se vor numi **scalari**, iar elementele spaţiului – **vectori (coloane)**. Ca notaţie, spaţiile vor fi desemnate prin majuscule, vectorii – prin litere mici ale alfabetului latin, iar scalarii – cu litere mici latine sau greceşti.

Înlocuind "vector-coloană" prin "vector-linie" obţinem un spaţiu de vectori-linie, dar vom prefera utilizarea vectorilor-coloană. Operaţia de transformare a unui tip de vector în celălalt se numeşte **transpunere** şi se notează cu T exponenţial. Extinsă la matrice (cf. §(1)8), ea se bucură de următoarele:

---

[1] În algebră **R** şi **C** nu apar ca simple mulţimi ci ca **structuri** înzestrate cu operaţiile ce le conferă calitatea de **corpuri algebrice**.

(1.2) PROPRIETĂŢI:

(1) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

(2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;

(3) $(A^T)^T = A$;

(4) $(AB)^T = B^T A^T$;

(5) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$, dacă A^{-1} există.

(1.3) NOTAŢII. $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) va desemna mulţimea tuturor coloanelor n-dimensionale de numere reale (complexe). Prin K^n desemnăm, în mod ambiguu, oricare din cele două mulţimi.

Notăm $M_n(K)$ mulţimea tuturor matricelor pătrate cu elemente din K, iar prin $M_{m,n}(K)$ – mulţimea tuturor matricelor având m linii, n coloane şi elemente din K.

EXERCIŢIUL 2.1

(a) Verificaţi în cazul fiecăreia din următoarele mulţimi, dacă este spaţiu vectorial de coloane, precizând de fiecare dată peste ce corp de scalari:

(i) $\mathbb{R}^n$; (ii) $\mathbb{C}^n$; (iii) $\{\mathbf{0}_n\}$, unde $\mathbb{0}_n$ este coloana nulă cu n componente;

(iv) $\{(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2=0\}$; (v) $\{(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2=0\}$;

(vi) $\{(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{C}^3 \mid \overline{x_1}=x_2\}$ ($\overline{x_1}$ este conjugatul complex al lui x_1);

(vii) $\{(x_1,x_2,x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1=1\}$; (viii) $\{Ax \mid x \in \mathbb{R}^3\}$ (unde $A \in M_3(\mathbb{R})$ este fixată).

(b) Proprietăţile (1), (2), (3) din definiţia 1.1 sunt **logic independente**, i.e. nu pot fi deduse una din cealaltă. Pentru a verifica acest lucru alegeţi submulţimi ale lui $\mathbb{R}^2$ în care să fie adevărate două dintre ele, nu şi a treia.

Vom extinde acum definiţia 1.1, de la mulţimile de coloane de numere, la alte tipuri de mulţimi.

(c) Înlocuind în 1.1 vectorii-coloană cu **vectorii-matrice**, suma lor cu suma matricelor, iar înmulţirea cu scalari cu înmulţirea cu numere a matricelor, verificaţi care din următoarele mulţimi este un "spaţiu vectorial de matrice" şi peste ce corp de scalari:

(i) $M_{m,n}(\mathbb{R})$; (ii) $M_{m,n}(\mathbb{C})$;

(iii) $\{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid X^T = X\}$ (mulţimea matricelor simetrice);

(iv) mulţimea matricelor $n \times n$, superior triunghiulare;

(v) mulţimea matricelor $n \times n$, nesingulare.

(d) Înlocuim în 1.1 vectorul-coloană cu **vectorul- polinom** $p(X)$, având coeficienţi în K, în nedeterminata X

$$p(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n \quad (a_i \in K).$$

Dacă $a_n \neq 0$, atunci gradul său este n.

Mulţimea acestor polinoame, având orice grad posibil, o notăm $K[X]$, iar prin $K_n[X]$ notăm mulţimea polinoamelor de grad $\leq n$ (n număr natural fixat). Reamintim că egalitatea a doi vectori polinoame înseamnă egalitatea gradelor şi egalitatea coeficienţilor termenilor de acelaşi grad (i.e **polinoame identice**). Adunarea vectorilor se face adunând coeficienţii termenilor de acelaşi grad, iar înmulţirea cu un scalar – înmulţind toţi coeficienţii cu el.

Verificaţi care din următoarele submulţimi din $K[X]$ sunt spaţii vectoriale peste K:
(i) $K[X]$; (ii) $\{p(X)\in K_n[X]\,|\,p(0)=0\}$;
(iii) $\{p(X)\in K_n[X]\,|\,p(0)=1\}$; (iv) $\{p(X)\in K_n[X]\,|\,p(X)=-p(-X)\}$ (mulţimea polinoamelor – funcţii impare).

§2. Independenţa liniară a vectorilor

Dimensiunile m şi n ale matricei A nu sunt semnificative ca dimensiuni ale sistemului liniar $Ax=b$. De pildă, matricea 3×4 din (1).10.1 având a treia linie – combinaţie liniară a primelor două, sistemul liniar corespunzător va avea doar două ecuaţii şi două necunoscute (principale). Pentru a evalua aceste dimensiuni se introduce **rangul** r al matricei i.e numărul pivoţilor. Deşi simplă, această definiţie a rangului este, teoretic, insuficientă, deoarece nu explică legătura directă dintre rang şi matrice. Anume:

rangul lui A este numărul maxim de linii (sau coloane) **liniar independente** din A.

Să precizăm ce vom înţelege prin liniar independenţă:

(2.1) DEFINIŢIE. *Mulţimea* $\{v_1,v_2,...,v_n\}$, *de vectori dintr-un spaţiu vectorial peste K, este* ***liniar independentă*** *(peste K) dacă pentru orice scalari* $c_1,c_2,...,c_n\in K$:

$$c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n=\mathbf{0} \Leftrightarrow c_1=0 \text{ şi } c_2=0 \text{ şi } ...c_n=0.$$

Aici **0** este vectorul nul al spaţiului, iar condiţia din definiţie este ca "singura combinaţie liniară (cu aceşti vectori) având ca rezultat vectorul nul să fie combinaţia cu toţi coeficienţii nuli". În limbaj curent vom spune că "$v_1,v_2,...v_n$ sunt liniar independenţi". Trebuie reţinut însă că aceasta este o proprietate a **totalităţii** şi **nu a fiecăruia** în parte.

Pentru a demonstra liniar independenţa unei mulţimi de vectori este suficient a demonstra implicaţia "$\Rightarrow$" (reciproca fiind mereu adevărată).

Opusă condiţiei de independenţă liniară este **dependenţa liniară.**

(2.2) DEFINIŢIE. ***O relaţie de dependenţă liniară*** *(peste K) între vectorii* $v_1,v_2,...,v_n$ *este o relaţie de forma*

$$c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n=\mathbf{0},$$

în care $|c_1|+|c_2|+...+|c_n|\neq 0$ *(i.e. nu toţi* c_i *sunt nuli).*

Are loc echivalenţa următoare (exerciţiu!)

(2.3) COROLAR. *Mulţimea* $\{v_1,v_2,...,v_n\}$ *este liniar dependentă peste K* (i.e. **nu este liniar independentă**) $\Leftrightarrow$ *există o relaţie de dependenţă liniară, peste K, între vectorii săi.*

Urmează un rezultat extrem de util, ce se referă la orice matrice în scară U.

(2.4) LEMĂ. *Cele r linii nenule şi cele r coloane care conţin pivoţii lui U sunt liniar independente.*

Demonstraţia nu ridică probleme de principiu, ci de notaţie. Pentru claritate, vom trata – cu titlu de exemplu – cazul următoarei matrice 3×5 în scară

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{35} \end{bmatrix}$$, unde $a_{12},a_{23},a_{35}\neq 0$ (pivoţi!).

Notăm a_1,a_2,a_3 liniile *(transpuse) şi fie* $c_1,c_2,c_3\in K$ *a.î.* $c_1a_1+c_2a_2+c_3a_3=\mathbf{0}_5$. Trecând pe componente această egalitate vectorială, obţinem cinci egalităţi scalare; vom scrie pe a doua, a treia şi a cincea (corespuzătoare coloanelor cu pivot):

$$c_1a_{12}=0\ ,\ c_1a_{13}+c_2a_{23}=0\ ,\ c_1a_{15}+c_2a_{25}+c_3a_{35}=0$$

Rezultă (verificaţi!) $c_1=0,c_2=0,c_3=0$ ■

Lăsăm ca exerciţiu demonstrarea liniar independenţei coloanelor a II-a, a III-a şi a V-a (cu pivot).

(2.5) OBSERVAŢIE. Pentru a stabili dependenţa sau independenţa liniară a coloanelor $v_1,...v_n$ din K^m trebuie avute în vedere **toate** combinaţiile liniare $c_1v_1+...+c_nv_n$ cu $c_i\in K$.

Dacă $A\in M_{m,n}(K)$ este matricea avându-i pe v_i drept coloane şi dacă notăm prin c coloana coeficienţilor, atunci combinaţia liniară anterioară va lua forma Ac. Vectorii coloană vor fi liniari dependenţi dacă sistemul $Ac=\mathbf{0}$ are soluţie **nenulă**. Existenţa unei astfel de soluţii poate fi stabilită prin aducerea lui A la o formă în scară U. Anume: dacă U conţine exact $r=n$ linii nenule (pivoţi), atunci nu vor exista necunoscute secundare, singura soluţie fiind $c=\mathbf{0}_n$, iar coloanele v_i – **liniar independente**; dacă dimpotrivă $r<n$, atunci coloanele v_i vor fi **liniar dependente**.

În particular,dacă $m<n$ rezultă $r<n$ deci:

(2.6) COROLAR. *În K^m, orice mulţime cu mai mult de m vectori este liniar dependentă.*

Acesta este un alt mod de exprimare a proprietăţii (1).10.4.

EXERCIŢIUL 2.2

(a) În ce condiţii mulţimea formată dintr-un singur vector este liniar independentă ?

(b) Este liniar independentă orice submulţime a unei mulţimi liniar independente? Justificaţi răspunsul.

(c) Cei n-r vectori ce alcătuiesc sistemul fundamental de soluţii al unui sistem liniar şi omogen (conform (1).10.3) sunt, în cazul $r<n$, liniar independenţi. Arătaţi acest fapt în cazul din exemplul (1).10.1 şi în cel al sistemelor din exerciţiul 1.10.b.

§3. Sistem de generatori. Bază

(3.1) DEFINIŢIE. *O mulţime de vectori, dintr-un spaţiu vectorial peste K, reprezintă un* ***sistem de generatori*** *ai acelui spaţiu, dacă fiecare vector al spaţiului se poate scrie drept combinaţie liniară a vectorilor sistemului, cu coeficienţi din K.*

(3.2) EXEMPLE

1) Coloanele oricărei matrice reprezintă un sistem de generatori ai spaţiului coloanelor sale (cf.definiţiei (1).10.5).

Astfel, pentru matricea din (1).10.1, coloanele generează un **plan** din $\mathbb{R}^3$. Acelaşi plan este generat şi de prima şi a treia coloană (cele corespunzătoare pivoţilor!), în timp ce primele două coloane generează o dreaptă din acest plan.

2) *Coloanele matricei unitate* I_n *poartă numele de* **versori** *ai* **axelor de coordonate** în $\mathbb{R}^n$, respectiv $\mathbb{C}^n$. Ele se notează $e_1,...,e_n$.

Dacă $x \in K^n$ rezultă: $x=(x_1,...,x_n)^T=x_1e_1+...+x_ne_n$.

Aşadar ei reprezintă un sistem de generatori pentru K^n (peste K).

Pe de altă parte, să observăm că e_i sunt liniar independenţi (de ce?). Din acest motiv, în acţiunea de generare a spaţiului K^n, nici unul dintre aceşti vectori nu este de prisos, nu putem renunţa la nici unul (aşa cum am făcut-o în primul exemplu).

(3.3) DEFINIŢIE. *Se numeşte* ***bază*** *a unui spaţiu vectorial peste K orice sistem de generatori care sunt liniar independenţi (peste K).*

Alăturarea celor două proprietăţi – de generare şi liniar independenţă – se dovedeşte fundamentală pentru întreaga teorie a spaţiilor vectoriale. Iată o primă consecinţă:

(3.4) LEMĂ. *Dacă* $\boldsymbol{B}=(v_1,v_2,...,v_n)$ *este bază a unui spaţiu vectorial peste K atunci pentru* ***orice*** *vector v al spaţiului* ***există*** *şi sunt* ***unici*** *coeficienţii* $c_1,c_2,...,c_n \in K$ *astfel încât*

$$v=c_1v_1+c_2v_2+...+c_nv_n \ .$$

(3.5) DEFINIŢIE. Coeficienţii c_i din relaţie se numesc **coordonatele** vectorului v în baza $\boldsymbol{B}$.

(3.6) Notăm prin $[v]_B$ coloana c a acestor coordonate şi o numim **coloana de coordonate** a vectorului v în baza $\boldsymbol{B}$.

Demonstraţia lemei: **Existenţa** coeficienţilor c_i rezultă din proprietatea de generare pe care o are baza, în timp ce unicitatea – din proprietatea de liniar independenţă.

Unicitatea. Dacă acelaşi v s-ar descompune în două moduri

$$v=c_1v_1+...+c_nv_n=d_1v_1..+d_nv_n \text{ cu } d_i \in K,$$

atunci ar rezulta că

$$(c_1-d_1)v_1+...+(c_n-d_n)v_n=\mathbf{0},$$

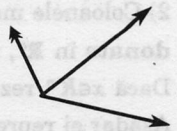
deci, cf. liniar independenţei, $c_1=d_1,...,c_n=d_n$. ■

(3.7) OBSERVAŢII. 1) Deşi sistemul de generatori a fost definit ca "mulţime de vectori" (abstracţie făcând de ordinea acestora), pentru o bază ordinea este importantă. Baza este un **sistem ordonat** de vectori. Două baze alcătuite din aceiaşi vectori aşezaţi în ordini diferite vor fi considerate **diferite**.

2) Baza $(e_1,e_2,...,e_n)$ a spaţiului K^n se numeşte **canonică** fiind, în general, preferată altor baze (există o infinitate !) datorită proprietăţilor sale. Printre ele menţionăm pe aceea că, pentru orice $x \in K^n$: x **coincide cu coloana sa de coordonate în baza canonică.**

(3.8) EXEMPLE

1) În planul $\mathbb{R}^2$ se consideră cei trei vectori din figură. Ei alcătuiesc un sistem de generatori ai planului, dar nu liniar independenţi (explicaţi!).



Oricare doi dintre ei se bucură de ambele proprietăţi ale unei baze a planului (de ce ?). Putem alcătui cu ei şase baze distincte pentru $\mathbb{R}^2$. Câte astfel de baze are planul ?

2) Considerăm matricea în scară

$$U=\begin{bmatrix} d_1 & * & * & * \\ 0 & 0 & d_2 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d_1,d_2 fiind pivoţii (nenuli), iar $*$ reprezentând elemente oarecare. Cele patru coloane ale sale generează spaţiul coloanelor lui U. Ele nu sunt liniar independente. Deşi există mai multe posibilităţi de alegere a bazei, vom prefera următoarea

(3.9) REGULĂ. ***Coloanele ce conţin pivoţii lui*** U ***determină o bază în*** $\mathcal{S}(U)$. Justificaţi valabilitatea ei în cazul particular al acestei matrice U.

EXERCIŢIUL 2.3

a) Dacă unui sistem de generatori ai spaţiului vectorial îi adăugăm un vector $v \in V$, sistemul astfel obţinut îşi păstrează proprietatea de a fi sistem de generatori ? Dar dacă, în loc de a adăuga, extragem un vector din sistem ? (Utilizaţi exemple.)

b) Arătaţi că, pentru spaţiul $M_{3,2}(K)$, sistemul matricelor $(I_{11},I_{12},I_{21},I_{22},I_{31},I_{32})$ unde I_{kl} are 1 în poziţia (k,l) şi 0 în rest, este o bază (**baza canonică**). Care va fi baza canonică a spaţiului $M_{m,n}(K)$?

c) Arătaţi că în spaţiul $K_n[X]$, sistemul $(1,X,...,X^n)$ este o bază (**baza canonică**).

d) Orice spaţiu vectorial posedă un sistem de generatori, de n-ar fi să luăm decât însăşi spaţiul (sistem infinit!). Arătaţi că în cazul spaţiului $K[X]$ (cf. exerciţiului 2.1.d) nu există un sistem finit de generatori!

e) Dacă V_1 şi V_2 sunt spaţii vectoriale peste acelaşi corp de scalari K, iar S_1 şi S_2 sunt sisteme corespunzătoare de generatori, arătaţi că incluziunea $V_1 \subset V_2$[1] este echivalentă condiţiei ca toţi vectorii lui S_1 să se exprime drept combinaţii liniare, cu coeficienţii în K , de vectorii lui S_2.

---

[1] Pentru notaţia $\subset$ a se vedea §5.

§4. Dimensiunea unui spaţiu vectorial

Deşi există o infinitate de baze, **numărul** vectorilor în oricare din ele **este acelaşi** !

De exemplu, în plan orice bază este alcătuită din doi vectori, trei vectori fiind întotdeauna liniar dependenţi (de ce?).

Această proprietate fundamentală a spaţiilor vectoriale va fi demonstrată drept următoarea

(4.1) TEOREMĂ. ***Dacă*** $v_1,v_2,..,v_m$ ***şi*** $w_1,w_2,...,w_n$ ***sunt baze ale aceluiaşi spaţiu vectorial (de coloane) atunci*** $m=n$.

Demonstraţie (prin reducere la absurd): Presupunem $m\neq n$. Pentru a ajunge la o contradicţie să analizăm, pentru început, cazul $m>n$.

Deoarece $w_1,w_2,...,w_n$ alcătuiesc o bază, pentru fiecare v_j există coeficienţii $a_{1j},..,a_{nj}$ astfel încât

$$v_j=a_{1j}w_1+...+a_{nj}w_n=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}w_i. \tag{1}$$

Pentru orice coeficienţi $c_1,...,c_m$ au loc egalităţile[1]

$$c_1v_1+...+c_mv_m=\sum_{j=1}^{m}c_jv_j\overset{(1)}{=}\sum_{j=1}^{m}c_j\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}w_i\Big)\overset{(R1)}{=}$$

$$\overset{(R1)}{=}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}c_ja_{ij}w_i\overset{(R2)}{=}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_ja_{ij}w_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}w_i\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}c_j\Big) \tag{2}$$

Considerăm relaţiile $\sum_{j=1}^{m}a_{ij}c_j=0$ pentru $i=\overline{1,n}$. Ele constituie un sistem liniar omogen care,în virtutea ipotezei $m>n$, are mai multe necunoscute decât ecuaţii. Cf. (1).10.4 există soluţia $c\neq\mathbf{0}$, contrazicând liniar independenţa vectorilor v_i şi demonstrând teorema în cazul $m>n$.

Când $m<n$ schimbăm rolurile celor două sisteme de vectori. ■

(4.2) DEFINIŢIE. *Numărul vectorilor dintr-o bază a spaţiului vectorial V (deci din toate) se numeşte* ***dimensiunea*** *lui V (peste K) şi se notează* $\dim V$ *sau* $\dim_K V$.

Revenim la demonstraţia teoremei. Rezultatul cheie a fost proprietatea (1).10.4 fomulată în teoria spaţiilor vectoriale astfel:

---

[1] Menţionăm regulile de calcul cu simbolul $\sum$:

(R1) $$\sum_{i=1}^{n}\alpha v_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}v_i,$$

(R2) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}.$$

"*în K^m orice mulţime cu mai mult de m vectori este liniar dependentă*" (conform 2.6).

Mai general, într-un spaţiu vectorial:

(4.3) *Dimensiunea spaţiului = numărul* ***maxim*** *de vectori liniari independenţi.*

Există şi altă formă de a caracteriza aceast număr important, anume:

(4.4) *Dimensiunea spaţiului = numărul* ***minim*** *de generatori ai spaţiului*[1].

De aici rezultă, cu necesitate, că într-un spaţiu vectorial de dimensiune n:

(4.5) *Orice n vectori liniar independenţi alcătuiesc o bază a spaţiului,* şi

(4.6) *Orice n vectori care generează spaţiul alcătuiesc,* de asemenea, *o bază a sa.*

Dar dacă avem la dispoziţie "prea puţini" vectori liniari independenţi sau "prea mulţi" generatori, atunci urmează să găsim baza folosindu-ne de următoarele principii (teoreme):

(4.7) **PRINCIPIUL DE COMPLETARE.** *Orice mulţime de vectori liniar independenţi poate fi completată până la o bază a spaţiului.*

(4.8) **PRINCIPIUL DE EXTRACŢIE.** *Din orice mulţime de generatori ai spaţiului se poate extrage o bază a sa.*

Vom întâlni în continuare modalităţi concrete de realizare a acestor principii.

EXERCIŢIUL 2.4

a) În cazul vectorilor spaţiului $\mathbb{R}^2$ (planul) imaginaţi o metodă concretă prin care din $n>2$ generatori ai săi să puteţi extrage o bază.

b) Justificaţi principiul de completare în spaţiul K^n construind o metodă prin care $r<n$ coloane liniar independente, e.g. coloane cu pivot ale unei matrice în scară U, să poată fi completate până la o bază a lui K^n. (Studiaţi pentru început cazul $n=3$.)

c) Arătaţi că dacă $V \subset W$ şi $\dim V = \dim W$, atunci $V=W$. *Indicaţie*: Utilizaţi 4.5 pentru a arăta că o bază în V este bază în W.

§5. Spaţiile fundamentale ale unei matrice de numere reale

Un spaţiu vectorial V de coloane m-dimensionale cu elemente din K este o submulţime a lui K^m. Dar simpla incluziune $V \subset K^m$ nu exprimă complet relaţia între cele două spaţii (care au, printre altele, **acelaşi vector nul**).

Vom spune, în acest caz, că V este un **subspaţiu** al lui K^m şi vom nota faptul prin

$$V \subset K^m.$$

Iată două căi principale prin care pot apărea asemenea subspaţii ale lui K^m.

---

[1] Aceste relaţii au, desigur, sens numai în aşa numitele "spaţii de dimensiune finită" şi nu au sens, de pildă, în spaţiul $K[X]$ (cf. exerciţiului 2.3.d).

1) V este generat de o mulţime de coloane: $v_1,...,v_n$ din K^m. Vom utiliza notaţia

(5.1) $$V=\overline{\{v_1,...,v_n\}}.$$

Un exemplu în acest sens îl oferă spaţiul $\mathcal{S}(A)$, al coloanelor matricei $A=[a_1...a_n]$, care va fi $\mathcal{S}(A)=\overline{\{a_1,...,a_n\}}$.

2) V este mulţimea tuturor coloanelor – *soluţii ale unui sistem liniar şi omogen.*

În primul caz vom spune că avem de-a face cu o definiţie **explicită** a lui V, iar într-a doua – cu o definiţie **implicită**. Acestor două căi le corespund moduri specifice de determinare a dimensiunii şi a bazei spaţiului respectiv (chestiuni ce alcătuiesc aşa numita problemă a "determinării spaţiului"). Tratarea lor unitară este subiectul paragrafului de faţă şi în care vom presupune că A este o matrice $m\times n$ **reală**. Desigur, toate rezultatele obţinute cu privire la matricele reale rămân adevărate şi pentru cele cu numere complexe.

§5.1. Spaţiul liniilor matricei A: $\mathcal{S}(A^T)$

Acesta este, prin definiţie, subspaţiul lui $\mathbb{R}^n$ generat de liniile matricei A. Întrucât ele sunt coloanele lui A^T, vom nota subspaţiul liniilor cu $\mathcal{S}(A^T)$, el fiind tot un spaţiu de coloane.

Rezultă (vezi ex. 2.5.1.b)

$$\mathcal{S}(A^T)=\{y\in\mathbb{R}^n \mid \exists x\in\mathbb{R}^m: y=A^Tx\}.$$

(5.2) LEMĂ. *Spaţiul liniilor matricei A coincide cu spaţiul liniilor oricărei f.s. a matricei A.*

Demonstraţie: Vom arăta că fiecare operaţie elementară, prin care se ajunge la forma în scară, nu modifică spaţiul liniilor.

Notând cu $l_1,..,l_i,..,l_j,..,l_m$ liniile (transpuse) ale lui A, considerăm transformarea lor în $l_1,..,l_i,..,l_j-\alpha l_i,..,l_m$. Fiecare din vectorii celui de al doilea sistem este combinaţie liniară de vectorii primului şi reciproc, deoarece $l_j=\alpha l_i+(l_j-\alpha l_i)$. Cf. exerciţiului 2.3.e, cele două sisteme generează acelaşi spaţiu vectorial (sunt echivalente). Arătaţi că sunt echivalente şi sistemele ce se obţin, unul din celălalt, prin permutarea vectorilor.

(5.3) COROLAR. 1) $dim\ \mathcal{S}(A^T)=dim\ \mathcal{S}(U^T)$.

2) $r(A^T)=r(U^T)$.

3) O bază (comună) a spaţiilor $\mathcal{S}(A^T)$ şi $\mathcal{S}(U^T)$ este alcătuită din **liniile nenule** (transpuse) din U.

1) şi 3) rezultă direct din 2.4 şi 5.2.

Notăm $r(A)=dim\ \mathcal{S}(A)$ şi îl numim **rangul pe coloane** al matricei A. Similar $r(A^T)=dim\ \mathcal{S}(A^T)$ se va numi **rangul pe linii** al matricei A.

Din 1) rezultă 2).

EXERCIŢIUL 2.5.1

a) Arătaţi că sunt echivalente şi sistemele de vectori obţinute unul din celălalt prin multiplicarea unui vector cu un număr **nenul**. Deduceţi că spaţiul liniilor matricei A coincide cu spaţiul liniilor formei sale **canonice** în scară (cf. exerciţiului 1.10.d).

b) Explicaţi de ce: $y\in\Im(A^T)\Leftrightarrow\exists x\in\mathbb{R}^m: y=A^Tx$.

§5.2. *Nucleul matricei* A: $\mathbb{N}(A)$

Nucleul matricei A *se mai* numeşte **spaţiul nul** al matricei A şi este alcătuit din **toate** soluţiile sistemului liniar omogen cu matricea A. Se notează $\mathbb{N}(A)$ – alteori $\mathrm{Ker}(A)$ – aşa încât

$$\mathbb{N}(A)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax=\mathbf{0}_m\}.$$

Este un subspaţiu al lui $\mathbb{R}^n$ (exerciţiul 2.5.2.a).

Deoarece sistemele $Ax=\mathbf{0}$ şi $Ux=\mathbf{0}$, unde U este o f.s. a lui A, sunt echivalente, rezultă

(5.4) $$\mathbb{N}(A)=\mathbb{N}(U).$$

Această mulţime de vectori din $\mathbb{R}^n$ – numită soluţie generală omogenă ((1).10.3) – este generată de $n-r$ vectori, r fiind numărul pivoţilor (i.e. rangul) lui U – **sistemul fundamental de soluţii al sistemului omogen**. Fiind un sistem de generatori ai nucleului şi totodată liniar independenţi (exerciţul 2.2.c),

(5.5) *vectorii sistemului fundamental alcătuiesc o bază în* $\mathbb{N}(A)$ *(şi în* $\mathbb{N}(U)$*).*

Aşadar

(5.6) $$dim\,\mathbb{N}(A)=dim\,\mathbb{N}(U)=n-r.$$

EXERCIŢIUL 2.5.2

a) Arătaţi că $\mathbb{N}(A)$ este un spaţiu vectorial.

b) $\Im(A^T)$ şi $\mathbb{N}(A)$ sunt subspaţii ale lui $\mathbb{R}^n$.

Arătaţi că $dim\,\Im(A^T)+dim\,\mathbb{N}(A)=dim\,\mathbb{R}^n$.

c) Dacă produsul AB are sens, arătaţi că $\mathbb{N}(B)\subset\mathbb{N}(AB)$. Arătaţi că dacă A are coloanele liniar independente, atunci $\mathbb{N}(AB)\subset\mathbb{N}(B)$, deci egalitatea.

§5.3. *Spaţiul coloanelor matricei* A: $\Im(A)$

Fie $A=[a_1|a_2...a_n]$ şi $\Im(A)=\overline{\{a_1,a_2,..,a_n\}}$.

Cu privire la notaţia acestui subspaţiu precizăm că: dându-se o aplicaţie $f:E\to F$, se numeşte **imagine** a lui f şi se notează $\Im(f)$ submulţimea

$$\{y\in F \mid \exists x\in E: y=f(x)\}.$$

Anticipând, vom spune că matricea A defineşte o aplicaţie liniară $f_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ prin

$$y=f_A(x)=Ax=[a_1|a_2...a_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1a_1+x_2a_2+...+x_na_n.$$

Deci $\Im(f_A)$ va fi mulţimea tuturor combinaţiilor liniare ale coloanelor din A: $\Im(A)$.

Fie U o formă în scară a matricei A. Spre deosebire de spaţiul liniilor, se poate ca $\Im(A)\neq\Im(U)$ (exerciţiul 2.5.3.a). Vom pune în evidenţă legătura existentă între coloanele celor două matrice:

5.7 LEMĂ. ***O mulţime de coloane din A este liniar independentă d.n.d. mulţimea coloanelor corespunzătoare din U este liniar independentă.*** (Corespunzătoare fiind coloanele cu aceeaşi poziţie în cele două matrice.)

Demonstraţie: Rescriind echivalenţa sistemelor $Ax=\mathbf{0}$ şi $Ux=\mathbf{0}$ sub forma

$$x_1a_1+...+x_na_n=\mathbf{0} \Leftrightarrow x_1u_1+...+x_nu_n=\mathbf{0} \qquad (1)$$

(aici $u_1,...,u_n$ reprezintă coloanele lui U), pe baza definiţiei 2.2 putem afirma că:

> "există o relaţie de dependenţă liniară între coloanele lui A d.n.d. «aceeaşi» (i.e. cu aceeaşi coeficienţi) relaţie există între coloanele lui U". (2)

Făcând în (1) anumiţi $x_i=0$, deducem că (2) este valabilă pentru **orice** submulţime a mulţimii coloanelor lui A. Cf.2.3, aceasta implică lema ■

5.8 COROLAR. 1) $dim\,\Im(A)=dim\,\Im(U)$.

2) $r(A)=r(U)$.

3) O bază în $\Im(A)$ se obţine alegând **coloanele lui A corespunzătoare coloanelor cu pivot din** U.

1) este o consecinţă a lemei şi a exprimării dimensiunii unui spaţiu ca număr maxim de vectori liniar independenţi ai spaţiului.

2) este exprimarea lui 1) cu ajutorul rangului pe coloane al celor două matrice.

3) Am remarcat în 3.8.2, că această regulă de alegere a bazei funcţionează pentru $\Im(U)$. Coloanele din A corespunzătoare acestor coloane vor fi, cf. lemei, liniar independente şi în număr egal cu $dim\,\Im(A)$, cf. 1). În virtutea lui 4.5 ele formează o bază în $\Im(A)$. ■

Revenim la forma în scară

$$U=\begin{bmatrix}d_1 & * & * & *\\0 & 0 & d_2 & *\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

având doi pivoţi, deci două linii nenule, iar baza în spaţiul coloanelor alcătuită din I-a şi a III-a coloană. Această proprietate a unei matrice în scară – de a avea numărul liniilor cu pivot egal cu al coloanelor cu pivot, are drept consecinţă egalitatea:

$$dim\,\Im(U^T)=dim\,\Im(U)$$

(care a fost stabilită prin compararea ambelor dimensiuni cu numărul pivoţilor lui U). Cf. 5.3 şi 5.8 rezultă

$$dim\Im(A^T)=dim\,\Im(U^T)=dim\,\Im(U)=dim\,\Im(A),$$

adică

$$\boxed{dim\,\Im(A^T)=dim\,\Im(A)}$$

pentru orice A.

Acest rezultat important, din algebra liniară, se exprimă de obicei sub forma:

rangul pe linii = rangul pe coloane,

valoarea lor comună numindu-se **rang**.

EXERCIŢIUL 2.5.3.

a) Explicaţi de ce, în cazul matricei A din (1).10.1: $\Im(A)\neq\Im(U)$, deci ar fi greşit să alegem ca bază în $\Im(A)$ coloanele cu pivot din U. Alegeţi corect baza acestui spaţiu.

b) Arătaţi că, dacă produsul AB are sens, atunci $\Im(AB)\subset\Im(A)$ şi deduceţi de aici inegalitatea importantă $\boxed{r(AB)\leq r(A)}$. Căutaţi exemple în care ea să fie strictă, respectiv în care să se transforme în egalitate (a se vedea ex. 2.5.2.c).

c) Deduceţi din ex.2.5.2.c că are loc şi inegalitatea $\boxed{r(AB)\leq r(B)}$.

5.4. Nucleul stâng al matricei A: $\mathbb{N}(A^T)$

Este spaţiul tuturor soluţiilor sistemului $A^Ty=\mathbf{0}$ deci subspaţiu al lui $\mathbb{R}^m$. Denumirea sa provine din faptul că, transpunând relaţia de definiţie: $y^TA=\mathbf{0}^T$, vectorul y care o satisface, va purta numele de **vector nul la stânga** pentru A.

Aplicând rezultatele din §5.2 rezultă

$$dim\,\mathbb{N}(A^T)=m-r,$$

o bază pentru nucleul stâng fiind alcătuită din cele $m-r$ soluţii particulare ale sistemului fundamental de soluţii pentru $A^Ty=\mathbf{0}$.

OBSERVAŢIE. Cunoscând descompunerea $PA=LU$, putem determina o bază în $\mathbb{N}(A^T)$ astfel:

rescriem descompunerea sub forma

$$(L^{-1}P)A=U$$

şi notând $y_1^T,\ldots,y_m^T$ liniile matricei $L^{-1}P$, egalitatea matriceală se va transforma *în m egalităţi de linii; scriem doar pe ultimele $m-r$*

$$y_{r+1}^TA=\mathbf{0}^T,\ldots,y_m^TA=\mathbf{0}^T.$$

(Membrii drepţi sunt liniile nule din U.)

Aşadar $y_{r+1}^T \ldots y_m^T \in \mathbb{N}(A^T)$.

Ca submulţime a sistemului liniar independent de linii ale matricei nesingulare $L^{-1}P$, ei sunt liniar independenţi (exerciţiul 2.2.b) şi în număr egal cu $dim\mathbb{N}(A^T)$; cf. 4.5, ei alcătuiesc o bază pentru nucleul stâng.

EXERCIŢIUL 2.5.4

a) Determinaţi cele 4 subspaţii fundamentale corespunzătoare matricei A din exemplele (1).10.1, (1).10.7, (1).10.8.

b) O matrice $m\times n$ de rang $r=1$ are întotdeauna forma $A=uv^T$ unde, în cazul real, $u\in\mathbb{R}^m$ şi $v\in\mathbb{R}^n$. Ce dimensiuni vor avea în acest caz cele 4 subspaţii fundamentale ? Determinaţi-le câte o bază.

c) O matrice $m\times n$ de rang r admite întotdeauna descompunerea $A=\overline{L}\,\overline{U}$, unde $\overline{L}$ este $m\times r$, iar $\overline{U}$ este $r\times n$, ambele fiind de rang r (cf. anexei C). Cum rezultă de aici că $\Im(A)=\Im(\overline{L})$ şi $\mathbb{N}(A)=\mathbb{N}(\overline{U})$?
Indicaţie. Utilizaţi exerciţiile 2.5.3.b şi 2.5.2.c.

d) Din incluziunile $\Im(AB)\subset\Im(A)$ şi $\mathbb{N}(B)\subset\mathbb{N}(AB)$ (exerciţiile 2.5.3.b şi 2.5.2.c), cu ajutorul transpunerii, rezultă $\Im((AB)^T)\subset\Im(B^T)$ şi $\mathbb{N}(A^T)\subset\mathbb{N}((AB)^T)$. Ce devin aceste incluziuni în cazul descompunerii $A=\overline{L}\,\overline{U}$?

§6. Aplicaţii liniare. Izomorfism

Cele două noţiuni care structurează întreaga algebră liniară sunt
1°) **spaţiul vectorial** (*liniar*);
2°) **aplicaţia liniară**.

Am menţionat deja că matricea $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ defineşte o aplicaţie $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ prin $f(x)=Ax$. Această aplicaţie este liniară datorită compatibilităţii sale cu cele două operaţii liniare: adunarea vectorilor şi înmulţirea lor cu scalari. Respectiv au loc relaţiile $f(x+y)=f(x)+f(y)$ şi $f(\alpha x)=\alpha f(x)$.

(6.1) DEFINIŢIE. *Fie V şi V' spaţii vectoriale peste acelaşi corp de scalari K. O aplicaţie $f:V\to V'$ este liniară dacă pentru $\forall v,w\in V$ şi $\forall\alpha\in K$:*

(1) $f(v+w)=f(v)+f(w)$;

(2) $f(\alpha v)=\alpha f(v)$.

Atenţie! *Dacă pe V sau V' nu sunt definite structuri de spaţii vectoriale peste acelaşi K, atunci nu se poate vorbi despre vreo aplicaţie liniară între V şi V'.*

(6.2) OBSERVAŢIE. Cele două proprietăţi ale liniarităţii pot fi formulate într-una singură

$$\forall\alpha,\beta\in K,\forall v,w\in V: f(\alpha v+\beta w)=\alpha f(v)+\beta f(w).$$

(6.3) PROPRIETATE *Dacă V, V', V'' sunt spaţii vectoriale peste acelaşi corp de scalari, iar $f:V\to V'$ şi $g:V'\to V''$ sunt aplicaţii liniare, atunci aplicaţia compusă $g\circ f:V\to V''$ (definită pentru $v\in V$ prin $(g\circ f)(v)=g(f(v))$ este liniară.*

Demonstraţia: exerciţiu!

Fiecărei aplicaţii liniare $f:V\to V'$ i se ataşează două subspaţii: nucleul şi imaginea.

(6.4) **Nucleul**, *notat* $\mathbb{N}(f)$, *este definit prin* $\mathbb{N}(f)=\{v\in V|f(v)=\mathbf{0}'\}$ ($\mathbf{0}'$=vectorul nul din V').

(6.5) **Imaginea**, *notată* $\Im(f)$, *este definită prin* $\Im(f)=\{v'\in V'|\exists v\in V: f(v)=v'\}$.

(6.6) **PROPRIETATE.** $\mathbb{N}(f)\subset V$ şi $\Im(f)\subset V'$.

Demonstraţie: Pentru a demonstra o relaţie de tipul $S\subset V$ trebuie arătat că

$$\forall x,y\in S,\forall\alpha,\beta\in K:\alpha x+\beta y\in S.$$

În cazul de faţă, dacă $v,w\in\mathbb{N}(f)$ şi $\alpha,\beta\in K$, trebuie arătat că $\alpha v+\beta w\in\mathbb{N}(f)$. Cf. definiţiei 6.4. aceasta revine la a arăta că $f(v)=f(w)=\mathbf{0}'$ şi $\alpha,\beta\in K$ implică $f(\alpha v+\beta w)=\mathbf{0}'$. Pe de altă parte, datorită liniarităţii lui f,

$$f(\alpha v+\beta w)=\alpha f(v)+\beta f(w)=\alpha\mathbf{0}'+\beta\mathbf{0}'=\mathbf{0}'.\ \blacksquare$$

Demonstraţi $\Im(f)\subset V'$.

Reamintim că o aplicaţie $f:E\to F$ este **injectivă** d.n.d.

$$\forall x,y\in E: f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$$

şi este **surjectivă** d.n.d.

$$\forall y\in F\ \exists x\in E: f(x)=y$$

sau, cum se mai scrie, dacă

$$f(E)=F.$$

Pentru o aplicaţie liniară condiţia de injectivitate devine:

(6.7) **CRITERIU.** *Aplicaţia liniară* $f:V\to V'$ *este* **injectivă** *dacă şi numai dacă* $\mathbb{N}(f)=\{\mathbf{0}\}$.

Demonstraţie: Echivalenţa din definiţia injectivităţii poate fi rescrisă, datorită liniarităţii lui f, sub forma $f(x-y)=\mathbf{0}'\Leftrightarrow x-y=\mathbf{0}$, sau notând $x-y=z$: $f(z)=\mathbf{0}'\Leftrightarrow z=\mathbf{0}$. Cf. definiţiei 6.4 aceasta înseamnă $\mathbb{N}(f)=\{\mathbf{0}\}$. $\blacksquare$

Definiţia 6.5 ne permite să scriem, pentru acelaşi f, echivalenţa

(6.8) f *este* **surjectivă** $\Leftrightarrow\ \Im(f)=V'$ (explicaţi !).

(6.9) **DEFINIŢIE.** *O aplicaţie liniară* $f:V\to V'$ *care este injectivă şi surjectivă se numeşte* **izomorfism** *între cele două spaţii vectoriale.*

(6.10) **DEFINIŢIE.** *Două spaţii vectoriale peste acelaşi corp de scalari se numesc* **izomorfe** *dacă între ele există un izomorfism.*

(6.11) Menţionăm că dacă f este un izomorfism între V şi V', atunci au loc implicaţiile:

1) $v_1,\ldots,v_n$ sunt liniar independenţi în $V\Rightarrow f(v_1),\ldots,f(v_n)$ sunt liniar independenţi în V'.

2) $v_1,...v_n$ sunt generatori pentru $V \Rightarrow f(v_1),...,f(v_n)$ sunt generatori pentru V'.

3) $(v_1,...,v_n)$ este o bază pentru $V \Rightarrow (f(v_1),...,f(v_n))$ este o bază pentru V'.

4) $dimV=dimV'$.

Putem spune, pe scurt, că un izomorfism **păstrează toate proprietăţile algebrice**, deci, din acest p.d.v., V şi V' trebuie considerate ca ***spaţii identice***.

Urmează un rezultat ce explică, în lumina acestor fapte, identitatea algebrică între orice spaţiu vectorial de dimensiune n, cu scalari din K, şi spaţiul K^n.

(6.12) **TEOREMA DE IZOMORFISM:** *Dacă V este un spaţiu vectorial cu scalari din K, $dimV=n$ şi $\boldsymbol{B}=(v_1,...,v_n)$ este o bază a sa, atunci aplicaţia* (cf. 3.6) $[*]_{\boldsymbol{B}}: V \to K^n$ **este un izomorfism.**

Demonstraţie: Reamintim că prin $[v]_{\boldsymbol{B}}$ am notat coloana coordonatelor lui v în baza $\boldsymbol{B}$.

Cf.3.4, aceasta defineşte o aplicaţie

$$[*]_{\boldsymbol{B}}: V \to K^n.$$

Arătăm că este: liniară, injectivă, surjectivă.

Liniariatea: Dacă $[v]_{\boldsymbol{B}}=x, [w]_{\boldsymbol{B}}=y, [v+w]_{\boldsymbol{B}}=z$, rezultă – cf. definiţiei lui $[*]_{\boldsymbol{B}}$ – că

$$v=\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, w=\sum_{i=1}^{n} y_i v_i, v+w=\sum_{i=1}^{n} z_i v_i,$$

de unde $\sum_{i=1}^{n} (x_i+y_i)v_i=v+w=\sum_{i=1}^{n} z_i v_i$ şi, cf **unicităţii** coordonatelor în baza $\boldsymbol{B}$: $x_i+y_i=z_i, i=\overline{1,n}$.

Adică $x+y=z$ sau $[v]_{\boldsymbol{B}}+[w]_{\boldsymbol{B}}=[v+w]_{\boldsymbol{B}}$.

Similar se arată că pentru orice $\alpha \in K, v \in V$

$$\alpha[v]_{\boldsymbol{B}}=[\alpha v]_{\boldsymbol{B}}.$$

Injectivitatea: Dacă $[v]_{\boldsymbol{B}}=\mathbf{0}$, atunci $v=\sum_{i=1}^{n} 0v_i=\sum_{i=1}^{n} \mathbf{0}_V=\mathbf{0}_V$; aşadar $\mathbb{N}([*]_{\boldsymbol{B}})=\{\mathbf{0}_V\}$.

Surjectivitatea: Dacă $x \in K^n$ şi construim $v=\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ va rezulta că $[v]_{\boldsymbol{B}}=x$ ■

(6.13) COMENTARIU. Cf. teoremei de izomorfism, din p.d.v. **algebric, putem identifica vectorii** oricărui spaţiu de dimensiune n peste K, **prin coloanele lor de coordonate**, într-o bază fixată. Astfel, ori de câte ori se cer rezolvate probleme de natură algerică, cum ar fi: determinarea unor spaţii, a unor baze, studiul liniar dependenţei sau independenţei unor sisteme de vectori, etc., le putem reduce la probleme similare referitoare la aceste coloane. (Algoritmii corespunzători pentru K^n au fost descrişi în §5).

EXERCIŢIUL 2.6

a) Construiţi izomorfismul $[*]_B$ dat de teorema 6.12 în cazurile $V=M_{3,2}(\mathbb{R})$ şi $V=\mathbb{R}_3[X]$, bazele corespunzătoare fiind cele din exerciţiul 2.3.(b) şi (c).

b) Deduceţi algoritmi corespunzători pentru a studia proprietăţile algebrice ale vectorilor matrice şi respectiv, polinoame.

c) Precizaţi dacă următorul sistem de vectori

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

este sistem de generatori pentru $M_{3,2}(\mathbb{R})$ şi în caz afirmativ, extrageţi din el o bază.

d) Aceeaşi pentru vectorii din $K_3[X]$:

$$X^3+2X^2+X-1,\ 3X^3+X^2+X,2X^3-X^2+1,3X^3+X+1,X^3+X+2.$$

§7. Matricea ca aplicaţie liniară şi aplicaţia liniară ca matrice

7.1. Matricea ca aplicaţie liniară

Dacă $A\in M_{m,n}(K)$ atunci aplicaţia $f_A(x)=Ax$ va transforma vectorii lui K^n în vectori din K^m.

Au loc următoarele relaţii (explicaţi!):

(7.1) $\mathbb{N}(f_A)=\mathbb{N}(A)$,

(7.2) $\Im(f_A)=\Im(A)$.

Aşezăm pe două coloane, pentru comparaţie, condiţii echivalente cu injectivitatea, respectiv surjectiviatea, aplicaţiei f_A:

(7.3) f_A este injectivă — f_A este surjectivă

(1) $\mathbb{N}(A)=\{\mathbf{0}_n\}$ (cf. 6.7); — (1′) $\Im(A)=K^m$;

(2) $r(A)=n$ (cf. 5.6); — (2′) $r(A)=m$ (cf. 5.8).

Aşadar f_A este un izomorfism atunci când $n=r(A)=m$, adică există A^{-1} a.î. $A^{-1}A=I=AA^{-1}$.

De remarcat că existenţa unei **inverse la stânga**, respectiv **la dreapta**, pentru A sunt condiţii ce pot fi aşezate în coloana stângă şi respectiv dreaptă – deci echivalente cu injectivitatea, respectiv surjectivitatea aplicaţiei f_A:

(3) $(\exists)B\in M_{n,m}(K)$ a.î. $BA=I_n$; — (3′) $(\exists)C\in M_{n,m}(K)$ a.î. $AC=I_m$.

Evident că în acest caz $m\geqslant n$ şi resp. $m\leqslant n$ (egalitatea având loc în cazul nesingular).

Altă formă a aceloraşi proprietăţi este:

$\forall b\in K^m$ sistemul liniar $Ax=b$ are

(4) **cel mult** o soluţie — (4′) **cel puţin** o soluţie

EXERCIŢIUL 2.7.1

a) Demonstraţi (2)⇒(3) şi (2′)⇒(3′), construind matricele B şi respectiv C cu ajutorul matricelor A^TA şi respectiv AA^T care, *cf. (3).3.4, sunt nesingulare.*

b) Demonstraţi implicaţiile (3)⇒(4) şi (3′)⇒(4′).

Indicaţie: Arătaţi, utilizând în primul caz matricea B, că două eventuale soluţii trebuie să coincidă şi construiţi, utilizând în al doilea caz matricea C, o astfel de soluţie.

c) Demonstraţi că (4)⇒(1) şi (4′)⇒(1′).

Indicaţie: Utilizaţi (1).10.3 şi respectiv (1).10.6.

7.2. *Aplicaţia liniară ca matrice*

Am văzut că orice aplicaţie f_A este liniară. Reciproc însă, **orice aplicaţie liniară $f: V \to V'$ este de acest tip** ? Răspunsul este afirmativ, dar necesită anumite precizări.

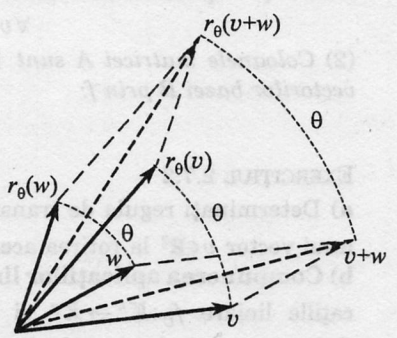
(7.4) *Cazul $V=K^n$ şi $V'=K^m$.*

În acest caz, dacă A este matricea $m\times n$ ale cărei coloane sunt vectorii $f(e_1),...,f(e_n)$ – imaginile prin f ale coloanelor matricei I_n – atunci pentru orice $x\in K^n$: $f(x)=Ax=f_A(x)$.

Ceea ce rezultă din descompunerea $x=x_1e_1+...+x_ne_n$, liniaritatea lui f şi faptul că $A=[f(e_1)|...|f(e_n)]$ (explicaţi!).

(7.5) EXEMPLU

Rotaţia vectorilor planului în jurul originii, în sens direct trigonometric, cu unghiul θ, este o aplicaţie pe care o notăm $r_\theta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Liniaritatea sa este consecinţa unor proprietăţi geometrice simple. Justificaţi, pe baza figurii, $r_\theta(v+w)=r_\theta(v)+r_\theta(w)$.



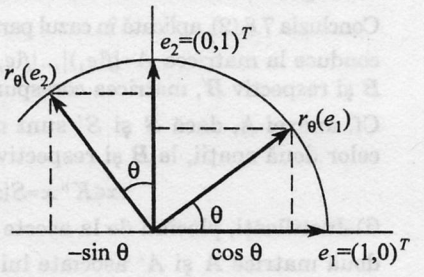
Construiţi o figură pentru a demonstra egalitatea $r_\theta(\alpha v)=\alpha r_\theta(v)$.

Ca urmare a celor anterior discutate, există o matrice 2×2, o vom nota R_θ, a.î. pentru orice $v=(v_x,v_y)^T$: $r_\theta(v)=R_\theta\cdot v$; anume

$$R_\theta=[r_\theta(e_1)|r_\theta(e_2)].$$

Coloanele sale sunt (priviţi figura!)

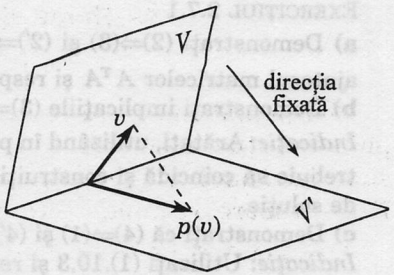
$$R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}.$$



De unde rezultă, între altele, proprietatea:

(7.6) Coordonatele v_x,v_y ale unui vector din plan se transformă, la rotirea acestuia cu unghiul θ – în sens trigonometric – respectiv în $v_x\cos\theta-v_y\sin\theta$ şi $v_x\sin\theta+v_y\cos\theta$.

(7.7) EXEMPLU



În spaţiul tridimensional $\mathbb{R}^3$ considerăm planele V şi V' şi aplicaţia p ce transformă vectorii din V în proiecţiile lor paralele cu o direcţie fixată, pe planul V' (vezi figura). Deoarece, prin proiecţie, un paralelogram se transformă într-un paralelogram, p verifică 6.1.(1), iar 6.1.(2) este consecinţa teoremei fundamentale a asemănării. Aşadar p este liniară.

Dar, deşi transformă vectori tridimensionali în vectori tridimensionali, matricea P, care o reprezintă, trebuie să fie 2×2, căci $n=\dim V=2$ şi $m=\dim V'=2$. Ceea ce face imposibilă o egalitate de forma $p(x)=Px$ (!)

În acest caz semnificaţia lui P va fi mediată de alegerea a două baze $\boldsymbol{B}$ şi $\boldsymbol{B}'$, în V şi respectiv V' şi exprimarea vectorilor prin coloanele lor de coordonate în aceste baze.

Dacă $\boldsymbol{B}=(v_1,v_2)$ şi $\boldsymbol{B}'=(v_1',v_2')$, vom construi $P=[p_1|p_2]$, unde $p_1=[p(v_1)]_{B'}$ şi $p_2=[p(v_2)]_{B'}$.

Deci $\forall v\in V$ a.î. $[v]_B=(x_1,x_2)^T=x$, rezultă

$$[p(v)]_{B'}=[p(x_1v_1+x_2v_2)]_{B'}=[x_1p(v_1)+x_2p(v_2)]_{B'}=x_1p_1+x_2p_2=P[v]_B.$$

(7.8) CONCLUZII

(1) *În general, oricărei aplicaţii liniare* $f: V\to V'$ *îi corespunde, într-o pereche de baze* $\boldsymbol{B}$ *şi respectiv* $\boldsymbol{B}'$, *o matrice* $A\in M_{m,n}(K)$ $(m=\dim V', n=\dim V)$ *ce verifică:*

$$\forall v\in V:\ [f(v)]_{B'}=A[v]_B.$$

(2) *Coloanele matricei* A *sunt* $[w_1]_{B'},\dots,[w_n]_{B'}$, *unde* $w_1,\dots,w_n$ *reprezintă imaginile vectorilor bazei* $\boldsymbol{B}$ *prin* f:

$$w_j=f(v_j).$$

EXERCIŢIUL 2.7.2

a) Determinaţi regula de transformare a coordonatelor ortogonale v_x,v_y,v_z ale unui vector $v\in\mathbb{R}^3$ la rotirea acestuia cu unghiul θ în jurul axei Oz.

b) Compunerea aplicaţiilor liniare şi produsul de matrice. Se consideră aplicaţiile liniare $f_C: K^n\to K^p$ şi $f_B: K^p\to K^m$. Cf. 6.3, aplicaţia $f_B\circ f_C: K^n\to K^m$ definită prin $(f_B\circ f_C)(x)=f_B(f_C(x))$ este şi ea liniară, deci cf. 7.4 există $A\in M_{m,n}(K)$ a.î. $f_B\circ f_C=f_A$. Arătaţi că $A=BC$.

c) Legea de schimbare a matricei unei aplicaţii la schimbarea bazei. Concluzia 7.8.(2), aplicată în cazul particular al bazelor canonice pentru $V=K^n$ şi $V'=K^m$ conduce la matricea $A=[f(e_1)|\dots|f(e_n)]$ (cf.7.4). Dacă în locul acestora se află bazele $\boldsymbol{B}$ şi respectiv $\boldsymbol{B}'$, matricea corespunzătoare, A', are coloanele $[w_j]_{B'}$.

Cf. anexei A, dacă S şi S' sunt matricele de trecere de la bazele canonice ale celor două spaţii, la $\boldsymbol{B}$ şi respectiv $\boldsymbol{B}'$, atunci

$$\forall x\in K^n: x=S[x]_B \text{ şi } \forall y\in K^m: y=S'[y]_{B'}.$$

(i) Justificaţi, plecînd de la aceste relaţii, legătura $S'A'=AS$ ce există între cele două matrice A şi A' asociate lui f.

(ii) Ce devine ea în cazul $n=m$ şi $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}'$?

§8. Suma şi intersecţia de subspaţii

8.1. Suma de subspaţii

Subspaţiile unui spaţiu vectorial reprezintă o colecţie de mulţimi între care putem efectua intersecţii şi reuniuni. Dar în timp ce intersecţiile de subspaţii sunt, la rândul lor, subspaţii, reuniunile nu sunt, decât în mod excepţional. Drept urmare, reuniunii îi va lua locul o nouă operaţie: **suma de subspaţii**.

Vom plasa, ca de obicei, discuţia în spaţiul K^n, unde V şi W vor fi subspaţii.

(8.1) DEFINIŢIE. *Mulţimea vectorilor lui K^n având forma $v+w$ cu $v\in V$ şi $w\in W$ se numeşte **suma** subspaţiilor V şi W. Ea se notează $V+W$.*

(8.2) PROPRIETATE. *Dacă $V,W\subset K^n$, atunci $V+W\subset K^n$.*

Demonstraţie: Dacă $x_i\in V+W$ $(i=1,2)$, atunci există $v_i\in V$ şi $w_i\in W$ a.î. $x_i=v_i+w_i$ $(i=1,2)$.

Deci $x_1+x_2=(v_1+w_1)+(v_2+w_2)=(v_1+v_2)+(w_1+w_2)\in V+W$.

Dacă $x\in V+W$, atunci $x=v+w, v\in V, w\in W$, iar pentru $\alpha\in K$:

$$\alpha x=\alpha(v+w)=\alpha v+\alpha w\in V+W.$$

Explicaţi neviditatea mulţimii $V+W$! ■

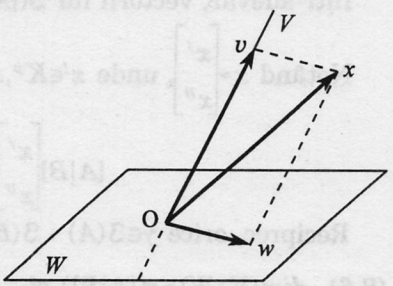
(8.3) EXEMPLE

1) Fie V şi W subspaţii de dimensiune 1 ale lui $\mathbb{R}^3$ (adică drepte prin origine). Dacă $V\neq W$ atunci $V\cap W=\{0\}$, iar $V+W$ este planul determinat de cele două drepte. Să observăm că mulţimea $V\cup W$ nu este, în acest caz, spaţiu vectorial, iar $V+W$ este **cea mai mică** mulţime de vectori care conţine pe V şi W, fiind totodată închisă la suma şi înmulţirea cu scalari a vectorilor.

2) În $\mathbb{R}^3$ considerăm subspaţiile (cf. figurii):

V = o dreaptă, W = un plan;

$\dim V+\dim W=3$ şi $V\cap W=\{0\}$.



Orice $x\in\mathbb{R}^3$ se descompune **unic** în $x=v+w$, $v\in V, w\in W$. v se numeşte "proiecţia lui x pe (dreapta) V, paralelă cu (planul) W", w fiind "proiecţia, paralelă cu V, pe W a lui x".

3) În $\mathbb{R}^n$ considerăm subspaţiul V de dimensiune r şi subspaţiul W de dimensiune $n-r$ astfel încât $V\cap W=\{\mathbf{0}_n\}$. Imaginea anterioară ne oferă o sugestie pentru fenomenul considerat: fiecare $x\in\mathbb{R}^n$ se va descompune sub forma $x=v+w$ cu $v\in V$ şi $w\in W$.

(8.4) PROPRIETATE. *Dacă $V\cap W=\{0\}$, atunci descompunerea lui x este* **unică**.

Demonstraţie: Presupunând $v+w=v'+w'$ *cu* $v'\in V$ şi $w'\in W$ rezultă

$$v-v'=w'-w$$

care, fiind din $V\cap W$, conduce la $v=v'$ şi $w=w'$. ■

Şi în acest caz, vectorul v se va numi proiecţia lui x pe V paralelă cu W, iar vectorul w – proiecţia lui x pe W paralelă cu V.

EXERCIŢIUL 2.8.1

a) Arătaţi că $V,W\subset K^n \Rightarrow V\cap W\subset K^n$.

b) În $\mathbb{R}^3$ considerăm subspaţiile: V generat de vectorul $a=(1,2,0)^T$ şi W generat de vectorii $b=(2,1,0)^T$ şi $c=(1,-1,\alpha)^T$. Fixaţi α a.î. $V\cap W=\{0\}$, apoi determinaţi descompunerea vectorului $e=(1,1,1)^T$ în suma $v+w$, unde v este proiecţia sa pe dreapta V paralelă cu planul W, iar w – proiecţia lui e pe planul W, paralelă cu dreapta V.

c) Dacă $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{R})$, atunci arătaţi că $\Im(A+B)\subset\Im(A)+\Im(B)$ şi deduceţi

$$\boxed{r(A+B)\le r(A)+r(B)}.$$

Construiţi un exemplu când are loc egalitatea.

8.2. Determinarea sumei şi intersecţiei a două subspaţii

Când $V,W\subset K^n$, putem întotdeauna presupune că acestea sunt date ca spaţii de coloane:

$$V=\Im(A) \text{ şi } W=\Im(B)\ ,$$

unde $A\in M_{n,p}(K), B\in M_{n,q}(K)$. (Altfel, utilizând rezultatele din §5, obţinem în prealabil o astfel de reprezentare.)

Scopul paragrafului este de a determina, în aceste ipoteze, dimensiunea şi o bază pentru spaţiul $V+W$, iar apoi pentru $V\cap W$.

Notând cu $[A|B]$ matricea $n\times(p+q)$ obţinută aşezând coloanele lui B după cele ale lui A rezultă

(8.5) $V+W=\Im([A|B])$.

Într-adevăr, vectorii lui $\Im([A|B])$ sunt de forma $[A|B]x$ cu $x\in K^{p+q}$.

Notând $x=\begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix}$, unde $x'\in K^p, x''\in K^q$, putem scrie

$$[A|B]\begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix}=Ax'+Bx''\in\Im(A)+\Im(B).$$

Reciproc, orice $y\in\Im(A)+\Im(B)$ este de forma $[A|B]x$ (de ce ?). ■

(8.6) $dim(V+W)=r([A|B])$ şi

(8.7) *O bază pentru $V+W$ este alcătuită din coloanele lui $[A|B]$ corespunzătoare coloanelor cu pivot ale unei f.s. pentru $[A|B]$.*

Pentru determinarea spaţiului $V\cap W$ utilizăm următoarea:

(8.8) **TEOREMĂ.** *Dacă A şi B au coloanele **liniar independente** atunci spaţiile $\Im(A)\cap\Im(B)$ şi $\mathbb{N}([A|B])$ sunt **izomorfe**.*

Demonstraţie: Vom defini izomorfismul

$$\mathbb{N}([A|B])\to\Im(A)\cap\Im(B).$$

Fie $x \in \mathbb{N}([A|B])$ i.e. $[A|B]x = \mathbf{0}_n$. Întrucît $x \in K^{p+q}$, notăm (ca mai sus)

$$x = \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix}, x' \in K^p, x'' \in K^q$$

şi sistemul omogen devine

$$Ax' + Bx'' = \mathbf{0}_n \tag{1}$$

echivalent cu

$$Ax' = -Bx''. \tag{1'}$$

Întrucât $Ax' \in \Im(A)$ şi $-Bx'' \in \Im(B)$, rezultă că (1') defineşte un vector în $\Im(A) \cap \Im(B)$ – imaginea lui x prin izomorfism.

Verificăm liniaritatea şi bijectivitatea aplicaţiei ce transformă pe x în Ax'.

Liniaritatea: Aplicaţia se obţine prin compunerea a două aplicaţii liniare şi anume: una care transformă $\begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix}$ în x' (verificaţi liniaritatea sa), cealaltă care transformă x' în Ax', şi va fi liniară cf. 6.3.

Injectivitatea: Nucleul este alcătuit din acele soluţii $\begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix}$ ale lui (1) care verifică $Ax' = \mathbf{0}$. Întrucât A are coloanele liniar independente, rezultă $x' = \mathbf{0}_p$. Deduceţi că $x'' = \mathbf{0}_q$.

De unde, pe baza criteriului 6.7, rezultă injectivitatea aplicaţiei.

Surjectivitatea: Dacă $y \in \Im(A) \cap \Im(B)$, atunci există $x' \in K^p, x'' \in K^q$ a.î. $y = Ax' = Bx''$, deci am găsit vectorul $x = \begin{bmatrix} x' \\ -x'' \end{bmatrix}$ care aparţine nucleului $\mathbb{N}([A|B])$, fiind transformat, prin aplicaţie, în y (de ce?). ■

(8.9) OBSERVAŢIE. Acest izomorfism transformă vectorii unei baze din $\mathbb{N}([A|B])$ în vectorii unei baze din $\Im(A) \cap \Im(B)$ (cf. 6.11). Rezultă:

$$\dim(V \cap W) = \dim \mathbb{N}([A|B]) = p + q - r([A|B]),$$

şi deoarece $p = r(A) = \dim V, q = r(B) = \dim W$ (cf. liniar independenţei coloanelor lui A şi B),

(8.10) $$\boxed{\dim V + \dim W = \dim(V+W) + \dim(V \cap W)}$$

Relaţia poartă numele de **legea modulară**.

(8.11) EXEMPLU

Dacă $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, să se determine $V+W$ şi $V \cap W$.

Determinarea sumei: Aducând matricea $[A|B]$ la o f.s. găsim

$$U=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & -1 & 1 \\ & & & & \end{bmatrix},$$

deci $\dim(V+W)=3$, iar o bază în $V+W$ este $(1,0,1,0)^T,(0,1,0,1)^T,(1,1,0,0)^T$. Explicaţi!

Determinarea intersecţiei: Legea modulară ne furnizează

$$dim(V \cap W)=2+3-3=2.$$

Pentru determinarea unei baze observăm, mai întâi, că A şi B au coloane liniar independente (altfel ar fi trebuit să extragem câte o bază în V şi W prin procedeul din 5.8.3).

Metoda I: Utilizând 8.9, transformăm, prin izomorfism, o bază din $\mathbb{N}([A|B])=\mathbb{N}(U)$. Întrucât aceasta este $(-2,-1,1,0,0)^T$, $(-1,-1,0,1,1)^T$, baza corespunzătoare din intersecţie va fi

$$A\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-1\\-2\\-1\end{bmatrix}, A\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

(explicaţi!)

Metoda a II-a: Reîntorcându-ne la f.s. U să observăm că numărul coloanelor fără pivot este $p+q-r$, adică $dim(V \cap W)$. Le vom exprima,pe fiecare, sub forma unor combinaţii liniare a coloanelor cu pivot. În cazul de faţă

$$(2,1,0,0)^T=2u_1+u_2 \quad , \quad (0,0,1,0)^T=u_1+u_2-u_4$$

(u_1,u_2,u_4 fiind coloanele cu pivot din U).

Datorită echivalenţei sistemelor omogene pe matricele $[A|B]$ şi U, notând $A=[a_1|a_2]$, $B=[b_1|b_2|b_3]$ rezultă (vezi demonstraţia lemei 5.7):

$$b_1=2a_1+a_2,\ b_3=a_1+a_2-b_2.$$

Din prima egalitate $b_1 \in V \cap W$, iar din rescrierea celei de a doua, $b_2+b_3 \in V \cap W$. Astfel am obţinut baza căutată:

$$(2,1,2,1)^T,(1,1,1,1)^T$$

(comparaţi cu rezultatul anterior).

EXERCIŢIUL 2.8.2

a) Determinaţi suma şi intersecţia subspaţiilor $V=\Im(A),W=\Im(B)$ pentru matricele

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\\0&0\\0&0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\\1&2\\0&1\end{bmatrix}$$

şi descompuneţi $x=(1,2,3,5)^T$ în suma $v+w$ cu $v \in V$ şi $w \in W$. Câte asemenea descompuneri există?

b) Aceeaşi problemă atunci când $V=\Im(A),W=\mathbb{N}(B)$, unde

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & -1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -3\end{bmatrix}.$$

8.3. Descompunerea spaţiului în sumă directă de subspaţii

Când $V\cap W=\{0\}$ suma $V+W$ se numeşte *directă* şi se notează $V\oplus W$. În acest caz

$$dim(V\oplus W)=dim\,V+dim\,W.$$

Dacă $dim\,V+dim\,W=n$, atunci rezultă (cum?)

(8.12) $K^n=V\oplus W$.

Această relaţie poartă numele de "descompunere a spaţiului (K^n) în suma directă a subspaţiilor V şi W" şi înseamnă că:

*orice vector $x\in K^n$ se descompune **unic** sub forma $x = v+w$, cu $v\in V$ şi $w\in W$.*

(A se vedea exemplele 8.3.2 şi 8.3.3.)

(8.13) **DEFINIŢIE**: *În general, dacă $V_1,...,V_p\subset K^n$ au proprietatea că: pentru fiecare $x\in K^n$ există şi sunt unici vectorii $v_i\in V_i$ ($i=\overline{1,p}$) a.î.*

$$x=v_1+...+v_p,$$

atunci vom spune că "spaţiul K^n s-a descompus în suma directă a subspaţiilor $V_1,...,V_p$" şi vom simboliza aceasta prin

$$K^n=V_1\oplus...\oplus V_p.$$

Menţionăm că şi în acest caz are loc relaţia între dimensiuni

$$n=dim\,V_1+...+dim\,V_p.$$

(8.14) OBSERVAŢIE. Am văzut că relaţia 8.12 are loc atunci când $V\cap W=\{0\}$ şi $dim\,V+dim\,W=n$. În cazul descompunerii în mai multe subspaţii, condiţiile asupra dimensiunilor acestor subspaţii, echivalente definţiei 8.13, sunt mai complicate şi nu le vom expune.

EXERCIŢIUL 2.8.3.

a) Determinaţi cele trei descompuneri ale spaţiului $\mathbb{R}^3$ în suma directă de câte două subspaţii generate de coloanele matricei I_3.

Câte descompuneri ale lui $\mathbb{R}^3$ în sumă directă de trei subspaţii generate de aceleaşi coloane există ?

b) Când $A=[a_1...a_n]$ are rangul n atunci orice $x\in\Im(A)$ se descompune unic (de ce?) în suma $x=\alpha_1a_1+...+\alpha_na_n$, deci $\Im(A)=\Im(a_1)\oplus...\oplus\Im(a_n)$.
De ce luând

$$V_1=\Im[a_1...a_p], V_2=\Im[a_{p+1}...a_n]$$

rezultă

$$\Im(A)=V_1\oplus V_2,$$

luând

$$V_1=\Im[a_1...a_p],\ V_2=\Im[a_{p+1}...a_q],V_3=\Im[a_{q+1}...a_n],$$

rezultă

$$\Im(A)=V_1\oplus V_2\oplus V_3 \text{ etc ?}$$

c) Plecând de la exerciţiul precededent determinaţi toate descompunerile lui $\mathbb{R}^4$ în sume directe de subspaţii generate de coloane ale matricei I_4.

Chestiuni recapitulative

1) Există spaţii vectoriale (reale) cu un număr finit de vectori ?

2) Câţi vectori conţine un spaţiu de dimensiune 1 ?

3) Figuraţi geometric doi, respectiv trei, vectori din $\mathbb{R}^3$ liniar independenţi. Pot exista patru astfel de vectori ?

4) Determinaţi o bază în subspaţiul format din vectorii lui $\mathbb{R}^3$ care au cele trei componente egale între ele.

5) De ce polinoame aveţi nevoie pentru a genera toate polinoamele cu coeficienţi reali?

6) Există vreo aplicaţie liniară care să transforme vectorii

$$(1,0)^T,(0,1)^T,(1,1)^T,$$

respectiv în

$$(0,1)^T,(1,0)^T,(2,2)^T \ ?$$

7) În $\mathbb{R}^3$, intersecţia a două subspaţii bidimensionale (plane) are cel puţin dimensiunea 1. Explicaţi faptul utilizând legea modulară.

8) Cum se va generaliza proprietatea precedentă la cazul a două subspaţii din $\mathbb{R}^n$?

9) Precizaţi care din următoarele afirmaţii sunt adevărate şi care sunt false (găsind în al doilea caz şi câte un contraexemplu):

(i) Dacă $v_1,..,v_n\in V$ generează V, atunci $dimV=n$.

(ii) Dacă $dimV=n$, atunci există vectorii $v_1,...,v_n\in V$ care generează V.

(iii) Dacă $A\in M_n(\mathbb{R})$, atunci $r(A)=r(A^2)$.

(iv) Dacă $A\in M_n(\mathbb{R})$ şi $r(A)=n$, atunci $r(A^2)=n$.

Capitolul 3

GEOMETRIA SPAŢIULUI $\mathbb{R}^n$

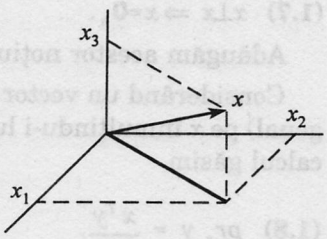
Rezumat. Proprietăţile studiate în capitolul 2 se referă la aşa numita "structură algebrică" a spaţiilor vectoriale, dar nu epuizează fondul problemelor ridicate de rezolvarea sistemelor liniare. Vom dezvolta acum metode noi prin generalizarea, de la $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}^3$ – a noţiunilor de **distanţă** şi **unghi** – la spaţiul $\mathbb{R}^n$; instrumentul acestei generalizări este **produsul scalar**, iar relaţia – cheie este cea de ortogonalitate (§1). Generalizată la subspaţii, aceasta conduce la precizarea relaţiilor geometrice existente între subspaţiile fundamentale ale unei matrice (§2). Se creează astfel cadrul teoretic necesar descrierii geometrice a "acţiunii" pe care această matrice o are – prin înmulţire – asupra vectorilor din $\mathbb{R}^n$ (§3).
Suportul teoretic construit permite o abordare complet nouă a problemei "rezolvării" sistemelor liniare printr-o metodă de esenţă geometrică – a celor mai mici pătrate (§4). În descrierea acesteia un rol important îl joacă **matricele de proiecţie** şi cele **ortogonale** (§5). Reducerea la cazul ortogonal este o metodă frecvent aplicată în calcul,anume prin procedeul **Gram-Schmidt**(§6). Teoretic, forma cea mai generală de "rezolvare", prin medoda c.m.m.p, a unui sistem liniar o constituie trecerea la **pseudoinversa** matricei sale (§7).

§1. Produs scalar şi ortogonalitate

În plan şi spaţiu noţiunile de: **lungime** a unui vector şi **unghi** între doi vectori au conţinut geometric intuitiv.

Spre a determina formule cât mai simple de calcul, raportăm vectorii la un sistem **ortogonal** de axe.

În plan ($\mathbb{R}^2$), $x=(x_1,x_2)^T$ va avea lungimea $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, iar în spaţiu ($\mathbb{R}^3$), $x=(x_1,x_2,x_3)^T$ va avea lungimea $\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^3}$ (vezi figura).



Generalizând, în spaţiul $\mathbb{R}^n$ raportat la axele de versori $e_1,\ldots,e_n$, lungimea vectorului x este

$$\|x\|=\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2} \tag{1}$$

Iată prima consecinţă, pe cât de simplă, pe atât de importantă, a acestei formule

(1.1) $\|x\|=0 \Rightarrow x=\mathbf{0}_n$ (reciproca fiind evidentă).

Pentru a determina o formulă pentru calculul unghiului între doi vectori necoliniari (liniar independenţi), x şi y, considerăm "planul" determinat de ei şi în acest plan "triunghiul" având drept "laturi" pe x, y şi $x-y$. Scriind teorema lui Pitagora generalizată

$$\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2\|x\|\|y\|\cos\theta$$

şi utilizând expresia (1) pentru lungime, un calcul simplu ne va conduce la

(1.2) $\cos\theta=\dfrac{x_1y_1+\ldots+x_ny_n}{\|x\|\|y\|}$.

Întrucât nu am demonstrat teorema lui Pitagora în $\mathbb{R}^n$, ci am luat-o ca ipoteză (deducând din ea 1.2), pentru a arăta că o astfel de ipoteză este plauzibilă, trebuie arătat că expresia $\dfrac{x^Ty}{\|x\|\|y\|}$ (i.e. membrul drept al formulei 1.2) este un număr cuprins între -1 şi 1, i.e.

(1.3) $|x^Ty|\le\|x\|\|y\|$.

Este un caz special al **inegalităţii lui Schwarz** (ex. 3.1.c). Ea se transformă în egalitate exact atunci când x şi y sunt coliniari (ex. 3.1.e), adică $\theta=0$ sau $\theta=\pi$.

Alt caz particular important de unghi θ este cazul ortogonal: $\theta=\pi/2$ (i.e. $\cos\theta=0$) şi el conduce la următoarea

(1.4) DEFINIŢIE. *Vectorii* $x,y\in\mathbb{R}^n$ *sunt* **ortogonali** *dacă* $x^Ty=0$. Notaţie: $x\perp y$.

Să observăm că vectorul nul $(\mathbf{0}_n)$ este ortogonal pe toţi $x\in\mathbb{R}^n$ şi – mai important –

(1.5) *singurul vector ortogonal pe toţi* $x\in\mathbb{R}^n$ *(deci şi pe el însuşi) este* ***vectorul nul.***

Pentru a explica aceasta, este suficient să observăm că pătratul lungimii lui x este produsul său scalar cu el însuşi, deci

(1.6) $\|x\|=\sqrt{x^Tx}$

şi în virtutea lui 1.1,

(1.7) $x\perp x\Rightarrow x=\mathbf{0}_n$.

Adăugăm acestor noţiuni pe cea de **proiecţie.**

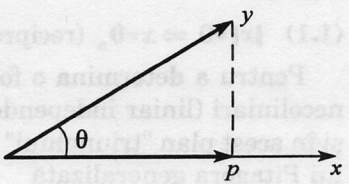
Considerând un vector **nenul** $x\in\mathbb{R}^n$ orice vector $y\in\mathbb{R}^n$ se proiectează (ortogonal) pe x înmulţindu-i lungimea prin cosinusul unghiului dintre el şi x; prin calcul găsim

(1.8) $pr_x\,y=\dfrac{x^Ty}{\|x\|}$.

Aceasta este proiecţia "cu semn" sau "scalară", semnul fiind "+" când unghiul θ este ascuţit şi "–" când θ este obtuz.

Proiecţia "ca vector" (o vom nota p) se obţine înmulţind $pr_x\,y$ cu **versorul** lui x: $\dfrac{x}{\|x\|}$. Obţinem

(1.9) $p=\dfrac{x^Ty}{\|x\|^2}x$.



Distanţa între (vârfurile vectorilor) $x,y\in\mathbb{R}^n$ este $\|x-y\|$.

În particular, distanţa (la pătrat) între y şi proiecţia sa, p, pe dreapta-suport a lui x, se determină cu formula

$$\|y-p\|^2=\frac{\|x\|^2\|y\|^2-(x^Ty)^2}{\|x\|^2}. \tag{1.10}$$

Noţiunea următoare fundamentează întreaga geometrie a spaţiului $\mathbb{R}^n$.

Produsul scalar (p.s.) este o operaţie între doi vectori x,y, ce se notează $\langle x,y\rangle$, şi se defineşte, aici, prin

$$\langle x,y\rangle=x_1y_1+\ldots+x_ny_n=[x_1\ldots x_n]\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}=x^Ty. \tag{1.11}$$

Are următoarele proprietăţi importante (pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}^n$, $\alpha\in\mathbb{R}$):

$$\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle \text{ (comutativitatea);} \tag{1.12}$$

$$\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle \text{ (distributivitatea);} \tag{1.13}$$

$$\langle x,\alpha y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle \text{ (omogenitatea);} \tag{1.14}$$

$$x\neq\mathbf{0}_n\Rightarrow\langle x,x\rangle>0 \text{ (pozitivitatea).} \tag{1.15}$$

Să remarcăm că prin p.s. am putut defini "lungimea" (cf.1.6), "unghiul" (cf. 1.2), relaţia de "ortogonalitate" (cf. 1.4) şi "proiecţiile" (cf. 1.8 şi 1.9). De aceea putem afirma că p.s. este noţiunea-cheie în construirea geometriei spaţiului $\mathbb{R}^n$.

Între geometria şi algebra lui $\mathbb{R}^n$ (expusă în cap. 2) există anumite legături. Una dintre ele (vom urmări şi altele) este

(1.16) LEMĂ: *Dacă* $v_1,\ldots,v_k\in\mathbb{R}^n$ *sunt* **reciproc ortogonali**, *adică* $i\neq j\Rightarrow v_i\perp v_j$ *şi* **nenuli**, *atunci ei sunt* **liniar independenţi**.

Demonstraţie: Începem prin a calcula coeficienţii combinaţiei liniare

$$c_1v_1+c_2v_2+\ldots+c_kv_k=v. \tag{1}$$

Înmulţind scalar ambii membri printr-unul din vectorii v_i, apoi utilizând distributivitatea şi omogenitatea p.s. rezultă

$$c_1(v_i^Tv_1)+c_2(v_i^Tv_2)+\ldots+c_k(v_i^Tv_k)=v_i^Tv.$$

Cf. ipotezei $j\neq i\Rightarrow v_i^Tv_j=0$, relaţia devine $c_i(v_i^Tv_i)=v_i^Tv$ şi deoarece $v_i\neq\mathbf{0}_n$, deci $v_i^Tv_i\neq0$, rezultă

$$c_i=v_i^Tv/v_i^Tv_i. \tag{2}$$

Dacă $v=\mathbf{0}_n$, atunci $c_i=0/v_i^Tv_i=0$ pentru $i=\overline{1,k}$, ceea ce probează liniar independenţa. ■

(1.17) OBSERVAŢIE: Din (1) şi (2) obţinem

$$v=\sum_{i=1}^{k} c_i v_i=\sum_{i=1}^{k} \frac{v_i^T v}{\|v_i\|^2} v_i=\sum_{i=1}^{k} p_i$$

p_i reprezentând – cf. 1.9 – proiecţia lui v pe v_i.

Relaţia arată că **descompunerea unui vector într-un sistem ortogonal de axe $v_1,\dots,v_n$ se face proiectându-l pe aceste axe.**

Este generalizarea unei proprietăţi, cunoscute în plan şi în spaţiu.

(1.18) EXEMPLE

(1) Un sistem ortogonal important de axe în $\mathbb{R}^n$ îl constituie coloanele $e_1,\dots,e_n$ ale matricei unitate. Aceasta este justificarea denumirii ce le-am dat-o, în (2).3.2, de **versori ai axelor de coordonate**.

(2) Iată încă un exemplu de versori ortogonali ai planului

$$v_1=(\cos\theta,\sin\theta)^T, v_2=(-\sin\theta,\cos\theta)^T.$$

Ei se obţin rotind, în sens trigonometric, versorii e_1,e_2 cu unghiul θ (cf.(2).7.5).

EXERCIŢIUL 3.1

a) În $\mathbb{R}^4$ se consideră "triunghiul" având drept laturi pe $x=(2,-1,3,-2)^T$, $y=(3,1,5,1)^T$ şi $x-y$. Determinaţi unghiurile sale "interioare".

b) Arătaţi că $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$, pentru $\alpha\in\mathbb{R}$ şi $x\in\mathbb{R}^n$.

c) Inegalitatea **Schwarz** are loc pentru **versorii** u şi v, aşa cum rezultă din şirul de inegalităţi

$$|u^T v|\le\sum_{i=1}^{n}|u_i||v_i|\le\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i^2+v_i^2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\|u\|\|v\|\ .$$

Explicaţi-le pe fiecare! Utilizând acest rezultat, demonstraţi 1.3 pentru orice $x,y\in\mathbb{R}^n$.

Indicaţie: Analizaţi cazurile $x,y\neq\mathbf{0}_n$ şi: $x=\mathbf{0}_n$ sau $y=\mathbf{0}_n$.

d) Verificaţi că $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2$ şi arătaţi că 1.3 implică $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ (inegalitatea triunghiului).

e) Arătaţi, în ipoteza $x\neq\mathbf{0}_n$, că inegalitatea lui Schwarz devine egalitate exact atunci când y coincide cu proiecţia sa, p, pe x, i.e. când x şi y sunt coliniari.

f) În cazul vectorilor polinoame $p,q\in\mathbb{R}[X]$ (ex. 2.1.d) p.s. se defineşte prin

$$\langle p,q\rangle=\int_a^b p(x)q(x)dx$$

unde $a<b$ sunt fixaţi. Verificaţi proprietăţile 1.12-15.

§2. Relaţii geometrice între subspaţiile fundamentale ale matricei $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$

Reamintim că cele patru subspaţii ale matricei A (§(2).5) pot fi grupate în două perechi:

$\Im(A^T)$ şi $\mathbb{N}(A)$, subspaţii în $\mathbb{R}^n$;

$\Im(A)$ şi $\mathbb{N}(A^T)$, subspaţii în $\mathbb{R}^m$.

Relaţia geometrică între subspaţiile fiecărei perechi este (parţial) exprimată în următoarea

(2.1) DEFINIŢIE. *Subspaţiile* $V,W \subset \mathbb{R}^n$ *se numesc* **ortogonale** *dacă pentru orice* $v \in V$ *şi* $w \in W$:

$$v^T w = 0 \quad (v \perp w).$$

(2.2) EXEMPLE

1) În $\mathbb{R}^2$ subspaţiile unidimensionale (i.e. dreptele) generate de vectorii ortogonali v_1 şi v_2 sunt ortogonale.

2) În $\mathbb{R}^3$ subspaţiile: V = o dreaptă şi W = un plan, sunt ortogonale d.n.d. dreapta este perpendiculară pe plan (explicaţi!), în timp ce subspaţiile V, W = plane nu pot fi ortogonale,chiar dacă planele sunt perpendiculare!

Aparentul paradox rezultă din următoarea

(2.3) PROPRIETATE. *Dacă* $V,W \subset \mathbb{R}^n$ *sunt ortogonale, atunci* $V \cap W = \{\mathbf{0}_n\}$.

Demonstraţie: Cf. 1.7.

Continuăm seria exemplelor:

3) În $\mathbb{R}^4$ subspaţiile V şi W generate de vectorii $(1,1,0,0)^T, (1,1,1,1)^T$ şi respectiv $(1,-1,1,-1)^T$, $(0,0,1,-1)^T$ sunt ortogonale.

(În $\mathbb{R}^4$ există "plane" ortogonale!)

Cele mai importante exemple de subspaţii ortogonale sunt furnizate de următoarea

(2.4) LEMĂ. *Dacă* $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, *atunci* $\Im(A^T)$ *şi* $\mathbb{N}(A)$ *sunt subspaţii ortogonale în* $\mathbb{R}^n$, *iar* $\Im(A)$ *şi* $\mathbb{N}(A^T)$ *sunt subspaţii ortogonale în* $\mathbb{R}^m$.

Demonstraţie: Pornim de la următorul

PRINCIPIU. (cf.ex.3.2.a): *Pentru a arăta că un vector este ortogonal pe un subspaţiu, este suficient de arătat că este ortogonal pe fiecare din generatorii subspaţiului.* (E.g. un vector este ortogonal pe un plan d.n.d. este ortogonal pe doi vectori ce determină planul.)

Dacă $w \in \mathbb{N}(A)$, atunci $Aw = \mathbf{0}_m$. Notând liniile transpuse ale matricei A cu $a_1,\ldots,a_m$, ecuaţiile sistemului omogen se scriu $a_1^T w = 0,\ldots,a_m^T w = 0$, ceea ce, în virtutea principiului enunţat, demonstrează prima parte a lemei.

Partea a doua rezultă din prima dacă înlocuim A cu A^T. ■

Afirmaţia conţinută în lemă este numai o explicitare parţială a relaţiei geometrice între spaţiul liniilor şi nucleu. Relaţia completă este:

"$\mathbb{N}(A)$ *conţine* ***toţi*** *vectorii lui* $\mathbb{R}^n$ *ortogonali pe* $\Im(A^T)$".

Pentru a o exprima recurgem la următoarea

(2.5) DEFINIŢIE. *Fie* V *o submulţime* **nevidă** *a lui* $\mathbb{R}^n$. *Se numeşte* **complement ortogonal** *al submulţimii* V *– mulţimea* **tuturor** *vectorilor lui* $\mathbb{R}^n$ *ortogonali pe (orice vector din)* V.

Mulţimea se notează $V^\perp$ şi rezultă:

(2.6) LEMĂ. *$V^\perp$ este un* **subspaţiu** *al lui $\mathbb{R}^n$.*

Demonstraţie: Dacă $x,y\perp v$, atunci $x+y\perp v$ şi $\alpha x\perp v$, deci $V^\perp$ verifică (2).1.1.(2) şi (3). Arătaţi că este nevidă !

(2.7) LEMĂ. *Dacă $S\subset\mathbb{R}^n$ şi $S\perp V$, atunci $S\subset V^\perp$.* $\left(S\perp V\Leftrightarrow\forall s\in S,\forall v\in V: s\perp v\right)$

Această proprietate exprimă faptul că $V^\perp$ este cel mai "mare" dintre subspaţiile ortogonale pe V. Demonstraţia poate fi un exerciţiu.

Apelăm din nou la un

(2.8) EXEMPLU

Reamintim că subspaţiile lui $\mathbb{R}^3$ sunt: $\{0_3\}$, dreptele (ce conţin originea), planele (ce conţin originea) şi $\mathbb{R}^3$ însuşi. Fiecăruia îi corespunde un complement ortogonal astfel:

$$\{0_3\}^\perp=\mathbb{R}^3,$$

$$\textit{dreaptă}^\perp = \textit{planul perpendicular pe dreaptă},$$

$$\textit{plan}^\perp = \textit{dreapta perpendiculară pe plan},$$

$$(\mathbb{R}^3)^\perp=\{0_3\}.$$

Generalizarea situaţiei din acest exemplu la $\mathbb{R}^n$ este dată în următoarea

(2.9) LEMĂ: *Considerăm subspaţiile ortogonale V şi W ale lui $\mathbb{R}^n$ a.î. $\dim V+\dim W=n$. Atunci*

$$\mathbb{R}^n=V\oplus W\ ,\ W=V^\perp\ ,\ V=W^\perp.$$

Prima dintre concluzii rezultă din 2.3 şi din cele discutate în §(2).8.3. Cât priveşte relaţia $W=V^\perp$, ea decurge din $W\subset V^\perp$ (cf. 2.7) şi din $\dim W=\dim V^\perp$ (fără demonstraţie!).

Urmează rezultatul fundamental:

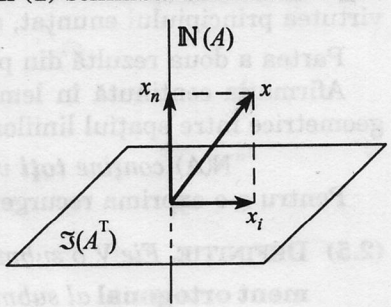
(2.10) TEOREMĂ. *Dacă $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$, atunci:*

(1) $\mathbb{R}^n=\Im(A^T)\oplus\mathbb{N}(A),\Im(A^T)=\mathbb{N}(A)^\perp,\Im(A^T)^\perp=\mathbb{N}(A)$ *şi*

(2) $\mathbb{R}^m=\Im(A)\oplus\mathbb{N}(A^T),\Im(A)=\mathbb{N}(A^T)^\perp,\Im(A)^\perp=\mathbb{N}(A^T)$.

Demonstraţie: (1) rezultă din $\dim\Im(A^T)=r$, $\dim\mathbb{N}(A)=n-r$ (cf. (2).5.3 şi (2).5.6) şi lemele 2.4 şi 2.9, iar (2) se obţine din (1) schimbând A cu A^T. ■

(2.11) COMENTARIU. Să considerăm cazul matricei $A\in M_{4,3}(\mathbb{R})$ având $r=2$. În $\mathbb{R}^3$ subspaţiile $\Im(A^T)$ şi $\mathbb{N}(A)$ vor fi: un plan şi respectiv o dreaptă perpendiculară pe plan, fiecare vector $x\in\mathbb{R}^3$ descompunându-se în suma x_i+x_n cu $x_i\in\Im(A^T)$ şi $x_n\in\mathbb{N}(A)$. Descompunerea fiind unică, x_i este proiecţia lui x pe planul $\Im(A^T)$ şi x_n este proiecţia sa pe dreapta $\mathbb{N}(A)$.



În $\mathbb{R}^4$ (nefigurativ!) subspaţiile $\Im(A)$ şi $\mathbb{N}(A^T)$ au dimensiunea 2, dar ne putem imagina situaţia corespunzătoare pe aceeaşi figură în care, evident, *forma geometrică a celor două subspaţii îşi pierde relevanţa.*

EXERCIŢIUL 3.2

a) Verificaţi principiul de la p. 55, utilizând proprietăţile p.s. şi *extindeţi-l la* cazul ortogonalităţii a două subspaţii, plecând de la ortogonalitatea generatorilor lor.

b) Utilizaţi teorema 2.10 pentru a determina un vector nenul v al dreptei perpendiculare pe un plan în fiecare din următoarele două cazuri:

(i) planul este "subîntins" de vectorii $v_1=(2,0,1)^T, v_2=(1,1,1)^T$;

(ii) planul este mulţimea $\{x\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2-2x_3=0\}$.

c) Un vector v perpendicular pe doi vectori (liniar independenţi) $x=(x_1,x_2,x_3)^T$, $y=(y_1,y_2,y_3)^T$ se poate obţine din aceştia prin operaţia numită **produs vectorial** şi se notează $v=[x,y]$. Produsul vectorial este *distributiv* şi *omogen* (ca şi cel scalar), dar este **anticomutativ**: $[x,y]=-[y,x]$.

În plus $[e_1,e_2]=e_3, [e_2,e_3]=e_1, [e_3,e_1]=e_2$.

(i) Arătaţi – utilizând aceste proprietăţi – că

$$[x,y]=(x_2y_3-x_3y_2,x_3y_1-x_1y_3,x_1y_2-x_2y_1)^T.$$

(ii) Determinaţi $[x,y]$ atunci când x şi y sunt liniar dependenţi, i.e. $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$.

d) Alternativa Fredholm. Teorema 2.10 se poate formula şi astfel:

Pentru fiecare $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *şi* $b\in\mathbb{R}^m$ *una şi numai una din problemele*:

1) $Ax=b$ *şi*

2) $A^Ty=\mathbf{0}_n, y^Tb\neq 0$,

are soluţie.

Demonstraţi alternativa Fredholm descompunând $b=b_i+b_n, b_i\in\Im(A), b_n\in\mathbb{N}(A^T)$ şi alegând $y=b_n$.

§3. Matricea ca aplicaţie liniară. Studiu geometric

Acest paragraf continuă §(2).7.1.

Fie aşadar $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$, iar $f_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ aplicaţia $f_A(x)=Ax$. În prezent suntem în măsură a face o descriere geometrică a modului în care matricea A transformă, prin înmulţire, vectorii lui $\mathbb{R}^n$; de a face adică, o descriere geometrică a acţiunii matricei A asupra acestor vectori.

Plecăm de la descompunerea

$$\mathbb{R}^n=\Im(A^T)\oplus\mathbb{N}(A)$$

care înseamnă că orice $x\in\mathbb{R}^n$ se descompune unic

$$x=x_i+x_n \text{ cu } x_i\in\Im(A^T) \text{ şi } x_n\in\mathbb{N}(A).$$

Aplicând A obţinem

$$Ax=Ax_i+Ax_n=Ax_i+\mathbf{0}.$$

În concluzie funcţia f_A transformă atât $x\in\mathbb{R}^n$ cât şi proiecţia sa x_i pe spaţiul liniilor din A, în aceeaşi imagine Ax aparţinând subspaţiului $\Im(A)$.

(3.1) LEMĂ. Aplicaţia $g:\Im(A^T)\to\Im(A)$ definită prin $g(x)=Ax$, pentru orice $x\in\Im(A^T)$, este un **izomorfism** *(între spaţiul liniilor şi spaţiul coloanelor lui A).*

Demonstraţie: *Liniaritatea* este imediată.

Injectivitatea: $\mathbb{N}(g)=\{x\in\Im(A^T)\,|\,g(x)=\mathbf{0}\}$.

Întrucât pentru fiecare $x\in\Im(A^T)$, $g(x)=Ax$ rezultă că

$$\mathbb{N}(g)=\{x\in\Im(A^T)\,|\,x\in\mathbb{N}(A)\}=\Im(A^T)\cap\mathbb{N}(A)=\{\mathbf{0}\}.$$

Surjectivitatea: Fie $y\in\Im(A)$. Atunci există $x\in\mathbb{R}^n$ a.î. $y=Ax$. Cf. celor mai sus arătate $Ax=Ax_i, x_i\in\Im(A^T)$ aşadar $y\in\Im(f)$ şi $\Im(A)\subset\Im(f)$. Totodată

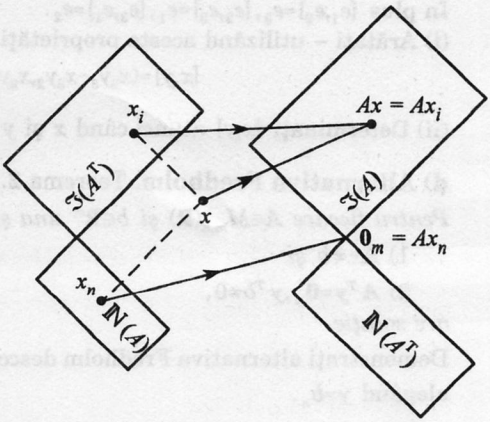
$$x\in\mathbb{R}^n\Rightarrow f(x)=Ax\in\Im(A),$$

deci $\Im(f)=\Im(A)$. ■

Ţinând seama de descompunerea corespunzătoare a spaţiului

$$\mathbb{R}^m=\Im(A)\oplus\mathbb{N}(A^T)$$

vom reprezenta transformarea definită de A în diagrama alăturată.



Acţiunea matricei A.

(3.2) COMENTARII (1) Izomorfismul g, între spaţiul liniilor şi spaţiul coloanelor unei matrice, este definit de însăşi matricea A.

(2) Aplicaţia g este inversabilă, iar $g^{-1}:\Im(A)\to\Im(A^T)$ este tot un izomorfism.

Pe de altă parte, aplicaţia liniară $f_{A^T}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ poate fi exact restricţionată la un izomorfism $h:\Im(A)\to\Im(A^T)$.

Dar izomorfismele g^{-1} şi h nu coincid (cf. ex. 3.3.b).

Altfel spus: izomorfismul definit de A^T **nu este inversul** izomorfismului definit de A.

Într-adevăr, calculând pentru $x\in\Im(A^T)$, imaginea $Ax\in\Im(A)$, apoi $A^TAx\in\Im(A^T)$, nu obţinem – în general – elementul x: $A^TAx\neq x$.

Analog, pentru $y\in\Im(A)$: $AA^Ty\in\Im(A)$, dar în general, $AA^Ty\neq y$.

Matricea care defineşte izomorfismul invers celui definit de A nu este A^T, ci o altă matrice, având aceleaşi dimensiuni cu A^T, numită **pseudoinversa** lui A şi notată A^+.

Ne vom ocupa de ea în §7.

(3) În legătură cu matricele A^TA şi AA^T, apărute mai sus, vom demonstra relaţiile:

(3.3) $r(A^TA)=r(AA^T)=r(A)$.

Demonstraţie: $\mathbb{N}(A)\subset\mathbb{N}(A^TA)$ (cf. ex.2.5.2.c).

Reciproc, fie $x\in\mathbb{N}(A^TA)$, deci $A^TAx=\mathbf{0}$. De unde $x^TA^TAx=0$ sau $\|Ax\|^2=0$, deci $Ax=\mathbf{0}$. Aşadar $\mathbb{N}(A)=\mathbb{N}(A^TA)$ şi $n-r(A)=n-r(A^TA)$.

Înlocuind A cu A^T găsim $r(A^T)=r(AA^T)$. ■

(3.4) CONSECINŢE. (1) A are coloanele liniar independente $\Leftrightarrow$ $r(A)=n$ $\Leftrightarrow$ A^TA este nesingulară;

(2) A are liniile liniar independente $\Leftrightarrow$ $r(A)=m$ $\Leftrightarrow$ AA^T este nesingulară. ■

EXERCIŢIUL 3.3

a) Studiaţi acţiunea matricei A^T asupra vectorilor lui $\mathbb{R}^m$ pe o diagramă asemănătoare celei de mai sus.

Explicaţi, urmând aceleaşi etape ca în cazul matricei A, care este izomorfismul definit de A^T.

b) Dacă $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ arătaţi că izomorfismul g definit de A nu este inversul izomorfismului h definit de A^T.

c) Arătaţi că din demonstraţia 3.3 rezultă $\mathbb{N}(AA^T)=\mathbb{N}(A^T)$. Este acest rezultat în contradicţie cu cel din ex. 2.5.2.c, ştiut fiind că A nu are, neapărat, coloanele liniar independente ?

§4. Metoda celor mai mici pătrate şi proiecţia unui vector pe un subspaţiu

În practică apar des sisteme liniare **incompatibile**. Spre exemplu, dacă $\alpha x=\beta$ este o lege fizică, iar noi urmărim determinarea lui x prin măsurători repetate ale lui α şi β, şirul de relaţii obţinut din m măsurători va fi $\alpha_1x=\beta_1,\ldots,\alpha_mx=\beta_m$. Notând $a=(\alpha,\ldots,\alpha_m)^T$ şi $b=(\beta_1,\ldots,\beta_m)^T$, aceste relaţii se vor scrie sub forma matriceală

(4.1) $ax=b$.

Erori inerente măsurătorilor fac însă ca diversele determinări să nu furnizeze **acelaşi** x. Altfel spus, sistemul 4.1 va fi incompatibil, sau altfel: termenul liber b nu aparţine spaţiului $\mathfrak{I}(a)$. Presupunând că măsurătorile se realizează în aceleaşi condiţii de corectitudine alegerea valorii lui x va trebui să ţină seama – în mod egal – de toate determinările.

Condiţia impusă este ca "**suma pătratelor** erorilor $\alpha_i x-\beta_i$, comise în fiecare ecuaţie, să fie **minimă**". Deoarece

$$(\alpha_1 x-\beta_1)^2+\ldots+(\alpha_m x-\beta_m)^2=\|ax-b\|^2,$$

adică pătratul distanţei între vectorii ax şi b, condiţia acesta este una **geometrică**. Valoarea $\bar{x}$, astfel obţinută pentru x, se va numi **soluţie în sensul celor mai mici pătrate** sau **pseudosoluţie**. S-o determinăm !

Notând $E=\|ax-b\|$ eroarea, găsim

(4.2) $E^2=\|ax-b\|^2=(ax-b)^T(ax-b)=(a^Ta)x^2-2(a^Tb)x+b^Tb$.

Aşadar E^2 este un trinom de gradul doi în x şi deoarece $a^Ta>0$ funcţia $E^2(x)$ are un minim obţinut pentru $\frac{dE^2}{dx}=2(a^Ta)x-2(a^Tb)=0$, anume

(4.3) $\bar{x}=\frac{a^Tb}{a^Ta}$.

La acelaşi rezultat ajungem dacă înlocuim, în sistemul (incompatibil) 4.1, termenul liber b prin proiecţia sa $p=\frac{a^Tb}{a^Ta}a$, pe a (cf. 1.9). Condiţia de minim traduce astfel proprietatea unei perpendiculare de a fi mai scurtă decât toate oblicele.

* *

*

În general, considerăm sistemul

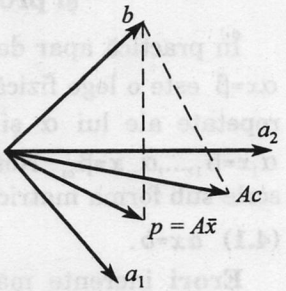
(4.4) $Ax=b, A\in M_{m,n}(\mathbb{R}), b\in\mathbb{R}^m$ (de obicei $b\notin\Im(A)$)

pentru care se caută $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ astfel încît eroarea $E=\|A\bar{x}-b\|$ să fie minimă. Notând $p=A\bar{x}\in\Im(A)$, va trebui ca pentru orice $x\in\mathbb{R}^n$:

$$\|p-b\|\le\|Ax-b\|.$$

În concordanţă cu exemplul precedent va trebui, deci, ca p să reprezinte **proiecţia** lui b pe subspaţiul $\Im(A)$.

În figură am reprezentat situaţia matricei $A=[a_1|a_2]$ cu coloane liniar independente.



Pentru a determina proiecţia lui b pe spaţiul coloanelor lui A: $p=A\bar{x}$, punem condiţia ca vectorul $A\bar{x}-b$ să fie ortogonal pe $\Im(A)$, deci pe orice $Ac, c\in\mathbb{R}^n$:

$$(Ac)^T(A\bar{x}-b)=0,$$

echivalent cu $c^T(A^TA\bar{x}-A^Tb)=0$. Cf. 1.5, rezultă

(4.5) $A^TA\bar{x}=A^Tb$

sistem liniar cu matricea $n\times n$ ce poartă, în literatura de specialitate, numele de **ecuaţii normale** corespunzătoare sistemului 4.4. Pentru a rezolva ecuaţiile normale, facem următoarea

(4.6) IPOTEZĂ. *Matricea A are rangul n (i.e. coloanele liniar independente).*

Conform 3.4, din 4.5 atunci va rezulta:

(4.7) $\overline{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb$.

Am obţinut, în acest fel, nu numai pseudosoluţia sistemului 4.4, ci şi proiecţia p a vectorului b pe spaţiul $\Im(A)$:

(4.8) $p=A\overline{x}=A(A^TA)^{-1}A^Tb$.

Deosebit de simple devin ecuaţiile normale atunci când

(4.9) IPOTEZĂ: *Coloanele matricei A sunt versori ortogonali.*

Notând $a_1,...,a_n$ aceste coloane, condiţiile corespunzătoare se vor scrie:

(4.10) $a_i^Ta_j=\delta_{ij}$,

unde

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & \text{pentru } i\neq j,\\ 1, & \text{pentru } i=j\end{cases}$$

este "simbolul lui Kronecker".

Cf. 1.16, formula 4.7 este aplicabilă, iar din ipoteză deducem că $A^TA=I$ (căci δ_{ij} sunt elementele matricei unitate I_n). Aşadar

(4.11) $\overline{x}=A^Tb$ şi $p=AA^Tb$.

Deoarece

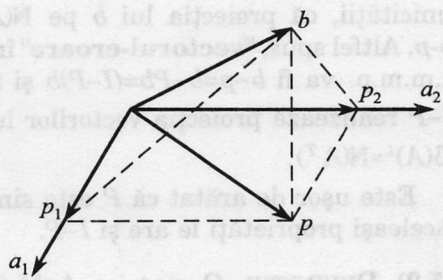
$$AA^T=[a_1...a_n]\begin{bmatrix}a_1^T\\ \vdots\\ a_n^T\end{bmatrix}=a_1a_1^T+...+a_na_n^T,$$

proiecţia p va căpăta forma

(4.12) $p=(a_1a_1^T+...+a_na_n^T)b=a_1a_1^Tb+...+a_na_n^Tb$.

Să remarcăm că $p_i=a_ia_i^Tb$ reprezintă proiecţia lui b pe a_i (cf.1.9) a.î. 4.12 are următoarea interpretare geometrică

(4.13) "*Dacă A are coloanele ortogonale, atunci proiecţia lui b pe spaţiul* $\Im(A)$ *se descompune în suma proiecţiilor sale pe fiecare din coloanele matricei A*". (Comparaţi cu 1.17)



În figură am reprezentat situaţia matricei $A=[a_1|a_2]$ având coloane ortogonale.

Proiecţia lui b pe "planul" lor este

$$p=a_1a_1^Tb+a_2a_2^Tb=AA^Tb.$$

EXERCIŢIUL 3.4

a) Determinaţi pseudosoluţia $\bar{x}$ a sistemului liniar şi incompatibil $x=1, x=2$ şi explicaţi semnificaţia geometrică a rezultatului găsit.

b) Dându-se valorile $y_1,...,y_k$ în k puncte distincte $x_1<...<x_k$ se numeşte **regresia liniară** a lui y la x, dreapta $y=mx+n$ a.î. $\sum_{i=1}^{k}(y_i-mx_i-n)^2=\min$.

Explicaţi de ce problema determinării acestei drepte este o problemă a c.m.m.p. şi determinaţi regresia liniară a lui y la x, corespunzătoare următoarelor date

(k=4) $\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 3 & 4 \\ \hline y_i & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}$.

c) Metoda c.m.m.p. se poate aplica şi în cazul în care mărimea y nu depinde liniar de x. Iată un exemplu: observând mişcarea unei comete şi determinându-i coordonatele polare r (distanţa polară) şi θ (unghiul polar), vom putea calcula elementele traiectoriei care, în virtutea primei legi a lui Kepler, este o *elipsă* sau *hiperbolă*. Aceste elemente sunt: *parametrul* p şi *excentricitatea* e din ecuaţia traiectoriei $r=\dfrac{p}{1-e\cos\theta}$. Explicaţi cum se vor determina ele prin metoda c.m.m.p., plecând de la un set de date experimentale (r_i,θ_i), $i=\overline{1,n}$.

§5. Matrice de proiecţie şi matrice ortogonale

5.1. Matrice de proiecţie

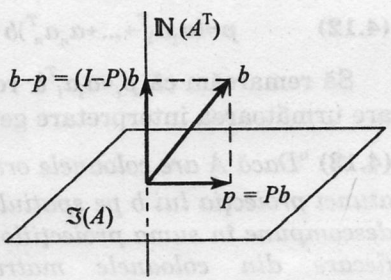
Fie $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ având coloanele liniar independente. Construcţia proiecţiei p a vectorului $b\in\mathbb{R}^m$ pe subspaţiul $\Im(A)$ este descrisă, în limbaj matriceal, prin matricea

(5.1) $$P=A(A^TA)^{-1}A^T$$

(cf.4.8), iar în limbaj de aplicaţii liniare, prin transformarea liniară

$$f_P:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m.$$

Ştim deja, cf. 2.10, că orice $b\in\mathbb{R}^m$ se descompune **unic** în proiecţia sa $p\in\Im(A)$ şi proiecţia sa pe $\mathbb{N}(A^T)$. Deoarece $p=Pb$ şi deoarece $b=p+(b-p)$, rezultă, în virtutea unicităţii, că proiecţia lui b pe $\mathbb{N}(A^T)$ este $b-p$. Altfel spus, **"vectorul-eroare"** în metoda c.m.m.p va fi $b-p=b-Pb=(I-P)b$ şi matricea $I-P$ realizează proiecţia vectorilor lui $\mathbb{R}^m$ pe $\Im(A)^\perp=\mathbb{N}(A^T)$.



Este uşor de arătat că P este simetrică şi că $P^2=P$ (P este idempotentă). Aceleaşi proprietăţi le are şi $I-P$.

(5.2) DEFINIŢIE. *O matrice* $A\in M_n(\mathbb{R})$ **simetrică** $(A^T=A)$ *şi* **idempotentă** $(A^2=A)$ *se va numi* **matrice de proiecţie**.

(5.3) LEMĂ. *Dacă A este o matrice de proiecţie, atunci, pentru orice $x\in\mathbb{R}^n$, vectorul Ax este proiecţia lui x pe spaţiul $\Im(A)$.*

Demonstraţie: Pentru ca $y=Ax\in\Im(A)$ să fie chiar proiecţia lui x pe $\Im(A)$ rămâne de dovedit că $y-x$ este ortogonal pe fiecare vector $Ac, c\in\mathbb{R}^n$. Iată calculul corespunzător:

$$(Ac)^T(y-x)=c^TA^T(A-I)x=$$
$$=c^T(A^TA-A^T)x=c^T(A^2-A)x=c^T\mathbf{0}x=0\ .\ \blacksquare$$

EXERCIŢIUL 3.5.1

a) Fie u versor din $\mathbb{R}^n$. Arătaţi că matricea uu^T este simetrică şi idempotentă. Pe ce subspaţiu proiectează ea vectorii lui $\mathbb{R}^n$?

Aceeaşi problemă referitoare la matricea $I-uu^T$.

b) Arătaţi că matricea P din relaţia 5.1 este o matrice de proiecţie. La fel pentru matricea $I-P$.

c) Fie $P_1,P_2\in M_n(\mathbb{R})$ matrice de proiecţie. Arătaţi că dacă $P_1P_2=\mathbf{0}$, atunci matricea P_1+P_2 va fi şi ea matrice de proiecţie şi că $\Im(P_1+P_2)=\Im(P_1)\oplus\Im(P_2)$.

5.2. Matrice ortogonale

Când A are coloanele ortonormate (i.e. $A^TA=I$), matricea din 5.1 devine $P=AA^T$.

Vom studia în continuare matricele pătrate având coloane ortonormate şi pe care le vom nota, în general, prin litera Q.

(5.4) TEOREMĂ. *Pentru $Q\in M_n(\mathbb{R})$ următoarele condiţii sunt echivalente*:

(1) *Q are coloanele ortonormate*: $Q^TQ=I$;

(2) $Q^T=Q^{-1}$;

(3) *Q are liniile ortonormate*: $QQ^T=I$;

(4) *transformarea definită de Q* ***păstrează lungimea*** *vectorilor: pentru orice $x\in\mathbb{R}^n$, $\|Qx\|=\|x\|$;*

(5) *transformarea definită de Q* ***păstrează produsul scalar****: pentru orice $x,y\in\mathbb{R}^n$, $(Qx)^TQy=x^Ty$.*

Demonstraţie:

1 ⇒ 2 $1=\det(Q^TQ)=\det Q^T\cdot\det Q=(\det Q)^2$ deci există Q^{-1} (vezi anexa B) care, fiind unică, $Q^T=Q^{-1}$.

2 ⇒ 3 Pe baza proprietăţii $Q^{-1}Q=QQ^{-1}=I$.

3 ⇒ 4 $\|Qx\|^2=(Qx)^TQx=x^TQ^TQx=x^TIx=\|x\|^2$.

4 ⇒ 5 $[Q(x+y)]^TQ(x+y)=\|Q(x+y)\|^2=\|x+y\|^2=\ (x+y)^T(x+y)$ i.e.

$\|Qx\|^2+2(Qx)^T(Qy)+\|Qy\|=\ \|Qx\|^2+2x^Ty+\|x\|^2$.

Cf. ipotezei rezultă $(Qx)^TQy=x^Ty$.

$5 \Rightarrow 1$ cf. (5), pentru fiecare $i=\overline{1,n}$ şi $j=\overline{1,n}$ $e_i^T Q^T Q e_j = e_i^T e_j = e_i^T I e_j$ sau $e_i^T(Q^TQ-I)e_j=0$. Ceea ce arată că elementul aflat în poziţia i,j din matricea Q^TQ-I este zero. Deci $Q^TQ-I=\mathbf{0}$. ■

(5.5) DEFINIŢIE. *Matricea* $Q\in M_n(\mathbb{R})$ *având proprietăţile* (1)-(5) *se numeşte* **ortogonală**.

(5.6) COMENTARII

(1) Condiţia (1) poate fi exprimată geometric astfel: "coloanele lui Q determină o bază de versori ortogonali în spaţiul $\mathbb{R}^n$ (deci o bază de acelaşi tip cu baza canonică $e_1,...,e_n$)". Acelaşi fapt se petrece – cf. (3) – şi cu liniile lui Q, deşi cele două baze sunt, în general, distincte.

(2) Condiţiile (4) şi (5) conduc la o altă proprietate satisfăcută de (transformarea definită de) Q, anume: Q **păstrează unghiurile**, adică $\forall x,y\in\mathbb{R}^n: \measuredangle(Qx,Qy)=\measuredangle(x,y)$. (Cf. 1.2, am definit $\cos\measuredangle(x,y)=x^Ty/\|x\|\|y\|$).

(3) Transformările spaţiului $\mathbb{R}^n$ în el însuşi ce păstrează distanţa între vectori se numesc **rigide**, iar cele ce păstrează unghiul între vectori se numesc **conforme**.

Aşadar *transformările liniare care sunt rigide sunt şi conforme şi reciproc*, ele fiind reprezentabile - în sensul din (2).7.4 - prin matrice ortgonale.

(5.7) PROPRIETATE. *Orice matrice ortogonală are determinantul* 1 *sau* –1.

Demonstraţie: $1=\det(Q^TQ)=(\det Q)^2$ deci $\det Q=\pm 1$.

(5.8) PROPRIETATE. *Dacă* $Q_1,Q_2\in M_n(\mathbb{R})$ *sunt ortogonale, atunci* $Q=Q_1Q_2$ *este ortogonală.*

Demonstraţie: $Q^T=Q_2^TQ_1^T=Q_2^{-1}Q_1^{-1}=(Q_1Q_2)^{-1}=Q^{-1}$.

(5.9) EXEMPLE

1) $R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ este matricea **de rotaţie** în sens direct a vectorilor planului cu unghiul θ (cf. (2).7.5). Determinantul este 1.

2) Matricea $H_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$ este ortogonală, dar având determinantul –1, nu este de rotaţie. Ea se numeşte **de reflexie** şi transformă vectorii planului în simetricii lor faţă de dreapta ce taie Ox, în origine, sub unghiul $\theta/2$.

EXERCIŢIUL 3.5.2

Matricele de rotaţie şi matricele de reflexie, având proprietatea de a nu modifica, prin înmulţire, lungimea vectorilor, oferă, din p.d.v. numeric,avantajul de **a nu amplifica erorile** conţinute în ei. (Asupra amplificării erorilor de către o matrice, cf. §(1).4). Utilizarea acestor matrice este, deci, preferată în algoritmii de calcul, oricărei alte matrice. Un exemplu este transformarea prin înmulţirea cu o matrice a unui vector nenul $v=(v_1,v_2)^T$ într-un vector coliniar cu $e_1=(1,0)^T$.

a) Determinaţi $\theta\in[0,2\pi)$ a.î. $R_\theta v=\|v\|e_1$. Este necesar factorul $\|v\|$? (*Aplicaţie*: $v=(3,4)^T$).

b) Matricea H_θ , anterior definită, se numeşte **reflexie elementară** sau **transformare Householder** şi poate fi pusă sub forma $I-2uu^T$. Verificaţi prin calcul că, dacă alegem drept u versorul vectorului $v+\|v\|e_1$, atunci $(I-2uu^T)v=-\|v\|e_1$.

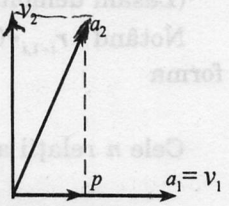
c) Din p.d.v. geometric, matricea $-H=2uu^T-I$ simetrizează vectorii planului faţă de o dreaptă ce trece prin origine; aceeaşi dreaptă pe care matricea $P=uu^T$ proiectează aceşti vectori (cf. ex.3.5.1.a). Explicaţi acest efect geometric pe care îl are înmulţirea cu $-H$ a vectorului $v\in\mathbb{R}^2$.

d) Dacă $A=\begin{bmatrix}3 & *\\ 4 & *\end{bmatrix}$ ($*$ =număr oarecare) construiţi $Q_1=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ şi $Q_2=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$ astfel încât $Q_1A=\begin{bmatrix}5 & *\\ 0 & *\end{bmatrix}$ şi $Q_2A=\begin{bmatrix}-5 & *\\ 0 & *\end{bmatrix}$.

§6. Procedeul Gram-Schmidt de ortogonalizare. Descompunerea QR a matricelor

Când $A^TA=I$, deci A are coloane ortonormate, pseudosoluţia $\overline{x}$ a sistemului $Ax=b$ se obţine prin formula remarcabil de simplă $\overline{x}=A^Tb$. În afara simplităţii formulelor, calculul cu matrice având coloane ortonormate prezintă avantajul important al neamplificării erorilor(cf. ex. 3.5.2). Astfel încât se preferă *înlocuirea coloanelor liniar independente ale matricei A cu o bază ortonormată în* $\Im(A)$. Procedeul se numeşte Gram-Schmidt, este **inductiv** şi se bazează pe un principiu geometric simplu, exemplificat în următoarea figură.

În "planul" $\overline{[a_1,a_2]}$ se poate înlocui baza oblică oferită de cei doi vectori, prin baza ortogonală $v_1=a_1$, $v_2=a_2-p$ (p fiind proiecţia lui a_2 pe a_1).



Ortogonalizarea. Să presupunem că în locul lui a_1 avem un subspaţiu de dimensiune k, în care dispunem de o bază ortogonală $v_1,\ldots,v_k$, iar a_{k-1} nu aparţine acestui subspaţiu. Construim proiecţia lui pe subspaţiu, utilizând ortogonalitatea coloanelor v_i . Cf. 4.13

$$p=p_1+\ldots+p_k\ ,$$

unde p_i este proiecţia lui a_{k+1} pe v_i .

Luând, ca şi în cazul a doi vectori,

$$v_{k+1}=a_{k+1}-p=a_{k+1}-p_1-\ldots-p_k\ ,$$

am făcut pasul de la k la $k+1$ vectori.

(6.1) TEOREMĂ. *Următoarele formule*

(1) $v_1=a_1$,

(2) $v_{k+1}=a_{k+1}-\frac{v_1^T a_{k+1}}{v_1^T v_1}v_1-\ldots-\frac{v_k^T a_{k+1}}{v_k^T v_k}v_k$,

permit transformarea **inductivă** *a unei baze* $(a_1,\ldots,a_n)$, *într-o bază ortogonală* $(v_1,\ldots,v_n)$, **echivalentă** *cu prima.*

Demonstraţie (prin inducţie după n).

Pentru $n=1$ cele două baze sunt identice.

Vom presupune proprietatea adevărată pentru $n-1$. Aşadar

$$\overline{\{a_1,\ldots,a_{n-1}\}}=\{v_1,\ldots,v_{n-1}\} .$$

Dacă $v_n=\mathbf{0}$, atunci, cf.(2), ar rezulta $a_n\in\overline{\{v_1,\ldots,v_{n-1}\}}=\overline{\{a_1,\ldots,a_{n-1}\}}$, ceea ce contrazice liniar independenţa sistemului $a_1,\ldots,a_n$. Utilizând ipoteza de ortogonalitate a vectorilor $v_1,\ldots,v_{n-1}$ şi formula (2) pentru $k=n-1$, se poate arăta prin calcul (verificaţi!), că v_n este ortogonal pe fiecare din aceştia. Suntem aşadar în ipotezele lemei 1.16 şi rezultă că vectorii $v_1,\ldots,v_n$ sunt liniar independenţi. ■

(6.2) Normarea. Pentru a obţine, aşa cum ne-am propus, o baza ortonormată pentru $\mathcal{S}(A)$, construim $w_k=\frac{1}{\|v_k\|}v_k=vers(v_k)$, pentru $k=\overline{1,n}$.

(6.3) Descompunerea $A=QR$. Cf. acestor notaţii şi a formulelor (1) şi (2) din teoremă, se arată prin inducţie că, pentru fiecare $i=\overline{1,n}$, există coeficienţii $r_{1i},\ldots,r_{ii}$ a.î.

$$a_i=r_{1i}w_1+\ldots+r_{ii}w_i \quad \text{unde } r_{ii}=\|v_i\| .$$

(Lăsăm demonstraţia ca exerciţiu!)

Notând $r_{i+1,i}=0,\ldots,r_{n,i}=0$ şi $Q=[w_1|\ldots|w_n]$, rescriem această relaţie sub forma

$$a_i=Qr_i \text{ , unde } r_i=(r_{1i},\ldots,r_{ni})^T .$$

Cele n relaţii astfel obţinute capătă forma egalităţii de matrice

$$A=QR ,$$

unde $Q\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *are coloanele ortonormate şi* $R\in M_n(\mathbb{R})$ *este superior triunghiulară cu valorile strict pozitive,* $\|v_i\|$, *pe diagonală.*

(6.4) EXEMPLU

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

Etapa de ortogonalizare:

$$v_1=a_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad v_2=a_2-p=a_2-\frac{v_1^T a_2}{v_1^T v_1}v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}$$

$$v_3=a_3-\frac{v_1^T a_3}{v_1^T v_1}v_1-\frac{v_2^T a_3}{v_2^T v_2}v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

Etapa de normare: $w_1=\frac{1}{\sqrt{2}}v_1, w_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\,v_2, w_3=\frac{\sqrt{3}}{2}v_3$.

Din prima etapă extragem relaţiile:

$$a_1=v_1, a_2=\frac{1}{2}v_1+v_2, a_3=\frac{1}{2}v_1+\frac{1}{3}v_2+v_3\ ,$$

care, în urma normării devin

$$a_1=\sqrt{2}\,w_1\ ,\quad a_2=\frac{1}{\sqrt{2}}w_1+\sqrt{\frac{3}{2}}\,w_2\ ,\quad a_3=\frac{1}{\sqrt{2}}w_1+\frac{1}{\sqrt{6}}w_2+\frac{2}{\sqrt{3}}w_3\ .$$

Aşadar

$$A=[a_1|a_2|a_3]=[w_1|w_2|w_3]\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ & \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ & & \frac{2}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}.$$

(6.5) APLICAŢIE la *calculul pseudosoluţiei* $\bar{x}$, *a sistemului* $Ax=b$ *cu coloane liniar independente.*

Dacă $A=QR$, înlocuind în 4.7, rezultă

$$\bar{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb=(R^TQ^TQR)^{-1}R^TQ^Tb=(R^TR)^{-1}R^TQ^Tb=$$
$$=R^{-1}(R^T)^{-1}R^TQ^Tb=R^{-1}Q^Tb\ .$$

Aşadar $\bar{x}$ este soluţia sistemului triunghiular $R\bar{x}=Q^Tb$, ce poate fi obţinută, cf. §(1).1, prin substituţii regresive.

EXERCIŢIUL 3.6

a) Plecând de la relaţiile $Q_1A=R_1$ şi $Q_2A=R_2$ obţinute în rezolvarea ex. 3.5.2.d, deduceţi două descompuneri $A=QR$ ale matricei $A=\begin{bmatrix}3 & *\\ 4 & *\end{bmatrix}$ (Q ortogonală, R superior triunghiulară).

b) Procedeul Gram-Schmidt se poate aplica în orice spaţii cu produs scalar. Astfel, în $\mathbf{R}[X]$, făcând produsul scalar cf. ex. 3.1(f), dacă $a=-b$, atunci x^{2k+1} va fi ortogonal pe x^{2m} (explicaţi!). Ortogonalizând Gram-Schmidt sistemul liniar independent $1,x,x^2$ etc., pe intervalul $[-1,1]$, se obţin **polinoamele Legendre.** Determinaţi primele 4 polinoame Legendre.

c) Ajungem astfel la o problemă importantă: **aproximarea cu polinoame a funcţiilor, pe un interval I**. Geometric, aceasta înseamnă să proiectezi funcţia respectivă pe un spaţiu de polinoame.Dacă I=[-1,1], utilizând polinoamele Legendre P_i, anterior calculate, proiecţia funcţiei (continue) $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ pe spaţiul $\mathbb{R}_n[X]$ este $p=\sum_{i=0}^{n} c_iP_i$. (Explicaţi de ce, prin analogie cu 1.17 şi 4.13.)

Determinaţi coeficienţii c_i ştiind că c_iP_i este proiecţia lui f pe "direcţia polinomului P_i".

d) Aproximarea cu **polinoame trigonometrice (Fourier)**. Pe intervalul $I=[-\pi,\pi]$, sistemul de vectori-funcţii T_i: $1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\ldots$ este ortogonal. Drept urmare, proiecţia p a funcţiei integrabile $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ pe spaţiul $\{\overline{T_0,T_1,..,T_n}\}$ este $p=\sum_{i=0}^{n} c_iT_i$ şi reprezintă aproximarea lui f cu un polinom trigonometric de *ordin n*.

Determinaţi proiecţia funcţiei

$$f(x)=\begin{cases}-1\ , & x\in[-\pi,0)\\ 1\ , & x\in[0,\pi]\end{cases}$$

pe spaţiul $\{\overline{T_0,T_1,T_2}\}$.

§7. Pseudoinversa A^+ a matricei A

Fie $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ fixată. Pentru determinarea pseudosoluţiei $\overline{x}$ a sistemului $Ax=b$, situaţia cea mai defavorabilă se prezintă atunci când coloanele lui A sunt **liniar dependente**. Nici una din formulele de calcul deja obţinute nu va putea fi folosită.

Să observăm că sistemul compatibil $A\overline{x}=p=Pb$, p fiind proiecţia lui b pe $\Im(A)$, are în acest caz o **infinitate** de soluţii, deoarece $r(A)<n$. Determinarea soluţiei generale – cf. §(1).10 – nu prezintă interes practic. Se preferă o soluţie particulară avantajoasă din p.d.v. numeric. Aceasta este (se arată) soluţia cea mai "scurtă".

(7.1) LEMĂ. (1) *Toate soluţiile sistemului* $A\overline{x}=p$ *au aceeaşi proiecţie* $\overline{x_i}$ *pe spaţiul* $\Im(A^T)$.

(2) *Această proiecţie este şi ea soluţie a sistemului:* $A\overline{x_i}=p$.

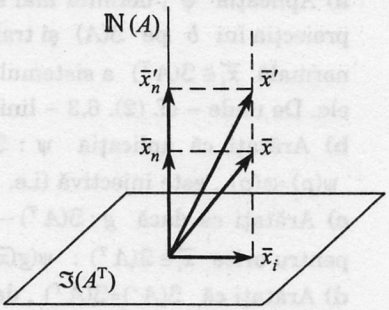
(3) *Dintre toate soluţiile* $\overline{x}$, *proiecţia* $\overline{x_i}$ *este cea mai scurtă, adică* $\|\overline{x_i}\|\le\|\overline{x}\|$.

Demonstraţie: Ştim că $\mathbb{R}^n=\Im(A^T)\oplus\mathbb{N}(A)$, deci orice $x\in\mathbb{R}^n$ se descompune (unic) în suma proiecţiilor sale pe cele două subspaţii; în particular $\overline{x}=\overline{x_i}+\overline{x_n}$ cu $\overline{x_i}\in\Im(A^T)$ şi $\overline{x_n}\in\mathbb{N}(A)$. Înmulţind cu A, deoarece $A\overline{x}=p$ şi $A\overline{x_n}=\mathbf{0}$, rezultă $A\overline{x_i}=p$. Ceea ce demonstrează (2).

Pentru alt $\overline{x'}$ găsim $\overline{x'}=\overline{x_i'}+\overline{x_n'}$ cu $\overline{x_i'}\in\Im(A^T)$ şi $\overline{x_n'}\in\mathbb{N}(A)$. Deci $\overline{x_i'}-\overline{x_i}\in\Im(A^T)$ şi $A\overline{x_i'}=p=A\overline{x_i}$ din care rezultă $A(\overline{x_i'}-\overline{x_i})=\mathbf{0}$.

Aşadar $\overline{x_i'}-\overline{x_i}\in\Im(A^T)\cap\mathbb{N}(A)=\{\mathbf{0}\}$ deci $\overline{x_i'}=\overline{x_i}$. Ceea ce demonstrează (1).

Figura alăturată reprezintă situaţia vectorilor $\overline{x}$ şi $\overline{x'}$, aşa cum decurge ea din 7.1.(1).



Pentru fiecare pseudosoluţie $\overline{x}$ considerăm triunghiul dreptunghic de laturi $\overline{x},\overline{x_n},\overline{x_i}$. Aplicând în fiecare caz teorema lui Pitagora

$$\|\overline{x}\|^2=\|\overline{x_i}\|^2+\|\overline{x_n}\|^2$$

şi deoarece $\overline{x_i}$ este latură comună, rezultă

$$\|\overline{x}\|^2=\min \Leftrightarrow \|\overline{x_n}\|^2=\min \Leftrightarrow \|\overline{x_n}\|^2=0 \Leftrightarrow \overline{x}=\overline{x_i}\ .$$

Ceea ce demonstrează (3). ■

(7.2) *Pseudosoluţia de lungime minimă* $\overline{x_i}$ *, a sistemului, se va numi* **pseudosoluţia normală**.

Să considerăm aplicaţia $\varphi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ care transformă fiecare $b\in\mathbb{R}^m$ în pseudosoluţia normală a sistemului $Ax=b$. Deoarece este liniară (cf.ex. 3.7.a), rezultă, cf. (2).7.4, că

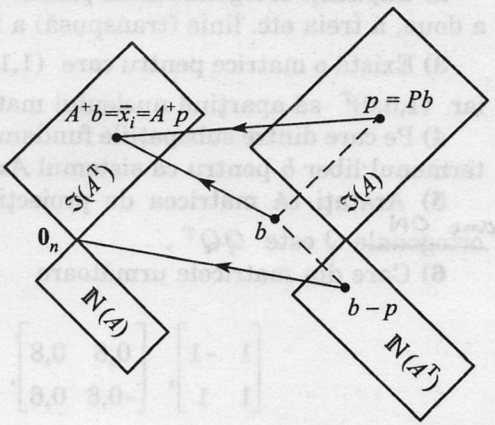
(7.3) *există o matrice* $n\times m$ *, pe care o vom nota* A^+ *şi numi* **pseudoinversa** *matricei A, a.î.*

$$\forall b\in\mathbb{R}^m \ : \ \varphi(b)=A^+b$$

Deoarece $\varphi(b)=\overline{x_i}\in\Im(A^T)$, rezultă că φ transformă $\mathbb{R}^m$ în $\Im(A^T)$. În general, ea nu este injectivă, dar dacă o restricţionăm la $\Im(A)$ ea devine injectivă (la fel cum f_A devine, prin restricţionare, izomorfismul g; cf.3.1).

Restricţia ψ *a lui* φ *la domeniul* $\Im(A)$ *şi codomeniul* $\Im(A^T)$ *este un izomorfism între cele două spaţii vectoriale.* Mai precis, *el este* ***inversul*** *izomorfismului g obţinut din* f_A *prin restricţionare la* $\Im(A^T)$ *şi* $\Im(A)$.

Redăm alăturat diagrama transformării definite de A^+ . Comparaţi-o cu cea definită de A (§3).



Acţiunea matricei A^+.

(7.4) CONSECINŢE

(1) $r(A^+)=r(A)$;

(2) $(A^+)^+=A$;

(3) AA^+ *este matricea ce proiectează vectorii lui* $\mathbb{R}^m$ *pe* $\Im(A)$;

(4) A^+A *este matricea de proiecţie a vectorilor lui* $\mathbb{R}^n$ *pe* $\Im(A^T)$.

EXERCIŢIUL 3.7

a) Aplicaţia φ , definită mai sus, este rezultatul compunerii a două aplicaţii: proiecţia lui b pe $\Im(A)$ şi transformarea acestei proiecţii p în pseudosoluţia normală $\overline{x_i} \in \Im(A^T)$ a sistemului $A\overline{x}=p$. Verificaţi liniaritatea fiecăreia dintre ele. De unde – cf. (2). 6.3 – liniaritatea lui φ .

b) Arătaţi că aplicaţia $\psi : \Im(A) \to \Im(A^T)$ definită pentru orice $p \in \Im(A)$: $\psi(p)=\varphi(p)$, este injectivă (i.e. $\mathbb{N}(\psi)=\{0\}$) şi surjectivă ($\Im(\psi)=\Im(A^T)$).

c) Arătaţi că dacă $g : \Im(A^T) \to \Im(A)$ este izomorfismul definit în 3.1, atunci pentru orice $\overline{x_i} \in \Im(A^T)$: $\psi(g(\overline{x_i}))=\overline{x_i}$. Deci $\psi=g^{-1}$.

d) Arătaţi că $\Im(A^+)=\Im(A^T)$, deci $r(A^+)=r(A)$.

e) Când A are coloanele liniar independente, sistemul $Ax=b$ are o singură pseudosoluţie $\overline{x}=(A^TA)^{-1}A^Tb$ (cf. 4.7) care va coincide, deci, cu pseudosoluţia normală $\overline{x_i}$. Deduceţi pentru acest caz formula de calcul a pseudoinversei A^+ şi faceţi calculul, presupunând cunoscută descompunerea $A=QR$.

f) Aplicaţi aceste rezutate pentru a calcula $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^+$.

g) Calculaţi $[1\ 1]^+$.

NOTĂ: În anexa C vom explica două metode generale de calcul pentru matricea pseudoinversă A^+ .

Chestiuni recapitulative

1) Arătaţi că în $\mathbb{R}^n$ vectorii $x+y$ şi $x-y$ sunt ortogonali d.n.d. $\|x\|=\|y\|$.

2) Explicaţi ortogonalitatea primei coloane a unei matrice nesingulare pe a doua, a treia etc. linie (transpusă) a inversei sale.

3) Există o matrice pentru care $(1,1,1)^T$ să aparţină spaţiului liniilor sale, iar $(1,0,0)^T$ să aparţină nucleului matricei ?

4) Pe care dintre subspaţiile fundamentale ale lui A trebuie să fie ortogonal termenul liber b pentru ca sistemul $Ax=b$ să aibă soluţie ?

5) Arătaţi că matricea de proiecţie pe spaţiul coloanelor unei matrice cu coloane ON ~~ortogonale~~ Q este QQ^T .

6) Care din matricele următoare

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}8 \\ -0{,}8 & 0{,}6 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -5 & \sqrt{10} \\ -5 & 1 & \sqrt{10} \\ \sqrt{10} & \sqrt{10} & 4 \end{bmatrix}.$$

este ortogonală ?

7) Ştiind că transformarea liniară $y=f(x)$, a lui $\mathbb{R}^2$ în $\mathbb{R}^2$, păstrează lungimea vectorilor, i.e. $\|y\|=\|x\|$ şi că $y_1=\frac{4}{5}x_1-\frac{3}{5}x_2$, exprimaţi y_2 ca funcţie de x_1 şi x_2 (două soluţii).

8) Dacă P este o matrice de permutare, arătaţi că $P^{-1}=P^T$.

9) Determinaţi ecuaţiile normale pentru sistemul $x=1, y=2, x+y=4$, *apoi pseudosoluţia sa.*

10) Determinaţi pseudoinversa *matricei nule cu trei linii şi două coloane.*

Capitolul 4

VALORI ŞI VECTORI PROPRII. FORME CANONICE DE MATRICE

Rezumat. Problema cu *valori şi vectori proprii* (VVP) este o altă problemă importantă a algebrei liniare de care se leagă multe aplicaţii (§1). Rezolvarea ei presupune determinarea,pe de o parte,a rădăcinilor unui **polinom "caracteristic"**(§2), iar pe de altă parte,a unor spaţii "proprii" corespunzătoare acestor rădăcini (§3).

Întrucât specificul acestei probleme impune considerarea spaţiilor $\mathbb{C}^n$, urmează a fi revizuite şi extinse, în acest nou cadru, rezultate din capitolul 3 (§4). Anumite tipuri de matrice din $M_n(\mathbb{C})$ – cele **hermitice** – au proprietăţi, legate de problema VVP, remarcabile (§5), dintre care cea mai importantă este "**teorema spectrală**" (§6).

Proprietatea exprimată prin teorema spectrală este, pe de o parte, un caz special al unei proprietăţi generale de **triunghiularizare** (§7). Pe de altă parte, reţinând doar proprietatea de "a **diagonaliza**", aceasta poate fi extinsă de la matricele hermitice la o clasă mult mai largă de matrice (§8). Toate aceste concepte – încadrabile în categoria "forme canonice de matrice" – sunt direct legate de rezolvarea **problemelor cu condiţii iniţiale** pentru ecuaţiile liniare, atât cu diferenţe finite (§9.1), cât şi diferenţiale (§9.2).

§1. Problema VVP

Toate problemele de calcul studiate până în prezent s-au redus la rezolvarea unor sisteme liniare, pentru care dispunem de metoda eliminării succesive a necunoscutelor. Iată însă o nouă problemă de calcul, pentru care metoda Gauss nu mai este suficientă.

(1.1) PROBLEMA CU VALORI ŞI VECTORI PROPRII:

Fiind dată matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$ *să se determine toate valorile* $\lambda \in \mathbb{C}$ *şi toţi vectorii* $x \in \mathbb{C}^n$ *care verifică relaţia* $Ax = \lambda x$.

Remarcăm de la început că această problemă **nu mai este liniară**, deoarece conţine produsul λx al celor două mărimi necunoscute.

(1.2) EXEMPLU (*problema cu condiţii iniţiale pentru un sistem diferenţial liniar*).
Numeroase legi ale naturii iau forma matematică a unor sisteme de ecuaţii diferenţiale. Iată un astfel de sistem:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u - v \\ \dfrac{dv}{dt} = u + v \end{cases} . \tag{1}$$

Trebuie găsite funcţiile $u(t)$ şi $v(t)$ care verifică relaţiile (1) şi condiţiile la momentul iniţial $t=0$:

$$u(0)=-1 \text{ şi } v(0)=1. \tag{2}$$

Spre deosebire de problema "la limită" din §(1).7, aici cunoaştem soluţia la un singur capăt al intervalului pe care va fi definită. De aceea se numeşte **problemă cu condiţii iniţiale**. Notând

$$w=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},\ w_0=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

(1) şi (2) capătă forma matriceală

$$\frac{dw}{dt}=Aw, \tag{4}$$

şi respectiv:

$$w(0)=w_0. \tag{5}$$

În cazul ecuaţiei diferenţiale $\frac{dw}{dt}=aw$, cu condiţia iniţială $w(0)=w_0$, soluţia ar fi fost $w=e^{at}w_0$. Vom căuta, pentru cele două funcţii necunoscute u,v ale problemei (1)+(2), soluţii de acelaşi tip, adică: $u=e^{\lambda t}x_1, v=e^{\lambda t}x_2$. Înlocuind în (1), găsim:

$$\lambda e^{\lambda t}x_1=e^{\lambda t}x_1-e^{\lambda t}x_2, \lambda e^{\lambda t}x_2=e^{\lambda t}x_1+e^{\lambda t}x_2,$$

relaţii pe care le împărţim prin $e^{\lambda t}\neq 0$ şi obţinem o problemă VVP:

$$x_1-x_2=\lambda x_1, x_1+x_2=\lambda x_2 \text{ adică } Ax=\lambda x,$$

unde A este matricea din (3) şi $x=(x_1,x_2)^T$.

(1.3) OBSERVAŢIE IMPORTANTĂ. *Soluţia $u(t)\equiv 0$ şi $v(t)\equiv 0$ verifică* (1), *dar* **nu verifică** (2). Drept urmare, în cadrul problemei 1.1, vom introduce pentru vectorii $x\in\mathbb{C}^n$ condiţia expresă

$$\boxed{x\neq \mathbf{0}}.$$

(1.4) EXEMPLU (*extrem cu legături şi problema* VVP).

Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$, $A^T=A$ şi $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ aplicaţia (neliniară!) definită pentru orice $x\in\mathbb{R}^n$ prin

$$g(x)=x^TAx.$$

În Analiza matematică se studiază problema găsirii acelor "puncte" $x_0\in\mathbb{R}^n$ a.î.

$$x_0^Tx_0=1, \tag{1}$$

$$\forall x\in\mathbb{R}^n: x^TAx-x_0^TAx_0 \text{ păstrează semnul.} \tag{2}$$

Aceste puncte se numesc puncte de **extrem condiţionat** sau **cu legături**. Dacă există, ele satisfac condiţia

$$(\nabla L)(x_0)=0 \tag{3}$$

unde $L(x,\lambda)=x^TAx-\lambda x^Tx$ este **funcţia lui Lagrange** pentru problema (1)+(2), iar ∇ **– operatorul gradient**. Prin calcul $\nabla L=2(Ax-\lambda x)$, deci determinarea extremelor condiţionate, în cazul funcţiei g, se reduce la o problemă VVP. Să remarcăm că din (1) rezultă condiţia $x_0\neq\mathbf{0}$.

EXERCIŢIUL 4.1

a) Am văzut în §(2).7.1 că fiecare matrice $A\in M_n(\mathbb{R})$ defineşte o transformare liniară $f_A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$. Prin f_A un subspaţiu de dimensiune 1 al lui $\mathbb{R}^n$ (vom spune

"o dreaptă" de vectori) se transformă fie în $\{\mathbf{0}\}$, fie într-o dreaptă de vectori (de ce?). Arătaţi că problema determinării "dreptelor" de vectori din $\mathbb{R}^n$ ce se transformă prin f_A în ele însele este o problemă VVP. Explicaţi denumirea de **"direcţii proprii"** ale transformării f_A ce li se dă acestor drepte.

b) Plecând de la relaţia $Ax=\lambda x$, deduceţi $A^2x=\lambda^2x$ etc., apoi $(A-3I)x=(\lambda-3)x$, iar – în cazul A nesingulară – deduceţi $\lambda\neq 0$ şi $A^{-1}x=\lambda^{-1}x$.

Aşadar, cunoscând o pereche (λ,x) din problema VVP pentru A, putem determina asemenea perechi (numite **"perechi caracteristice"**) pentru $A^2, A^3, A-3I, A^{-1}$, etc.

c) Arătaţi că valoriile proprii ale unei matrice de proiecţie (cf. (3).5.2) aparţin mulţimii $\{0,1\}$.

Indicaţie: Utilizând relaţia $A=A^2$, deduceţi $\lambda=\lambda^2$.

Explicaţi geometric acest rezultat, determinând direcţiile proprii ale transformării $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ce proiectează vectorii spaţiului pe un plan.

d) Utilizând proprietatea unei matrice ortogonale de a păstra lungimea vectorilor, arătaţi că orice valoare proprie a sa este un număr complex de modul 1 (unitar).

§2. Polinomul caracteristic

Problema VVP poate fi rezolvată pe baza teoriei din §(1).10 a sistemelor liniare.

Rescriind relaţia $Ax=\lambda x$ sub forma

$$(A-\lambda I)x=\mathbf{0}$$

obţinem un sistem liniar şi omogen $n\times n$, cu matricea depinzând de parametrul λ, pentru care se cer (cf.1.3) soluţii nenule .

(2.1) LEMĂ. *Următoarele condiţii sunt echivalente*

(1) există coloana x: $(A-\lambda I)x=\mathbf{0}$ şi $x\neq\mathbf{0}$;

(2) $r(A-\lambda I)<n$;

(3) $\det(A-\lambda I)=0$.

Condiţia de existenţă a unei soluţii nenule pentru $(A-\lambda I)x=0$ este, conform (2). 2.5, condiţia $r(A-\lambda I)<n$. Ceea ce, în baza definiţiei rangului unei matrice ca: ordin maxim al unui minor nenul al matricei, echivalează cu: $\det(A-\lambda I)=0$.

Notăm $p_A(\lambda)$ polinomul

$$\textbf{(2.2)}\qquad p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

numindu-l ***polinom caracteristic*** *al matricei* A.

În virtutea regulei de dezvoltare a unui determinant, constatăm că termenii în λ^n şi respectiv λ^{n-1} din $p_A(\lambda)$ provin exclusiv din produsul

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)...(a_{nn}-\lambda),$$

al elementelor de pe diagonala principală.

Termenul liber fiind $p_A(0)=detA$, putem scrie

(2.3) $$p_A(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{11}+...+a_{nn})\lambda^{n-1}+... ...+detA.$$

(2.4) DEFINIŢIE. *Se numesc* ***valori proprii*** *ale matricei A toate rădăcinile ecuaţiei*

$$p_A(\lambda)=0.$$

(2.5) CONSECINŢĂ. *O matrice de ordinul n are n valori proprii* $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$.

Demonstraţie: Cf. 2.3 p_A are gradul n, deci $p_A(\lambda)=0$ are n rădăcini (distincte sau nu). ■

Pe baza relaţiilor între coeficienţii lui p_A şi rădăcinile sale $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$, din 2.3 rezultă

(2.6) $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n = a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$ (numită urma lui A);

(2.7) $\lambda_1\lambda_2...\lambda_n = \det A$.

(2.8) EXEMPLU

$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ are polinomul caracteristic

$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+2$$

cu rădăcinile $\lambda_1=1+\sqrt{-1}$, $\lambda_2=1-\sqrt{-1}$ (complexe!).

Prin natura problemei VVP, ce necesită rezolvarea unei ecuaţii, $p_A(\lambda)=0$, rezultă:

(2.9) CONCLUZIE. *Cadrul natural de rezolvare al problemei VVP este* ***mulţimea numerelor complexe*** $:\mathbb{C}$.

EXERCIŢIUL 4.2

a) Determinaţi polinomul caracteristic şi valorile proprii ale matricei superior triunghiulare

$$T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

b) Aceeaşi problemă pentru matricea superior triunghiulară

$$T=[t_{ij}]\in M_n(\mathbb{C})\ (t_{ij}=0 \text{ pentru } i>j).$$

c) Aceeaşi problemă pentru matricea de rotaţie

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},$$

verificând proprietatea din ex. 4.1.d.

§3. Spaţiile proprii

Fie $A\in M_n(\mathbb{C})$. Ne interesează în continuare rădăcinile **distincte** ale ecuaţiei $p_A(\lambda)=0$. Mulţimea lor o notăm $Spec(A)$ şi o vom numi **spectrul** matricei A.

În exemplul 2.8: $Spec(A)=\{1-i,1+i\}$, iar în exerciţiul 4.2.a $Spec(T)=\{1\}$.

Pentru a rezolva complet problema 1.1, rămân de găsit, pentru fiecare $\lambda\in Spec(A)$, soluţiile (nenule) ale sistemului liniar omogen

$$(A-\lambda I)x=\mathbf{0}.$$

Din p.d.v. algebric, aceasta revine la determinarea spaţiului $\mathbb{N}(A-\lambda I)$ şi care se va numi ***spaţiul propriu corespunzător valorii proprii*** λ. Am urmărit în §(2).5.2 cum se poate face aceasta. Remarcăm că din 2.1.(2) rezultă, pentru $\lambda\in Spec(A)$: $dim\,\mathbb{N}(A-\lambda I)=n-r(A-\lambda I)>0$, deci

$$\boxed{\mathbb{N}(A-\lambda I)\neq\{\mathbf{0}\}}\ .$$

(3.1) DEFINIŢIE. *Vectorii unei baze (oarecare) a spaţiului propriu* $\mathbb{N}(A-\lambda I)$ *se numesc* ***vectorii proprii*** *ai matricei A corespunzători v.p.* λ.

Conform relaţiilor anterioare

(3.2) *pentru fiecare* $\lambda\in Spec(A)$ *dispunem de* $n-r(A-\lambda I)$ *vectori proprii pentru A.*

(3.3) EXEMPLU (continuare).

Pentru $\lambda_1=1-i$ sistemul ce ne dă vectorii proprii este $(A-\lambda_1 I)x=\begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{bmatrix}x=\mathbf{0}$, având soluţia (nenulă) $x=(-i,1)^T$, iar pentru $\lambda_2=1+i$: $(A-\lambda_2 I)x=\begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}x=\mathbf{0}$ cu $x=(i,1)^T$; ceea ce încheie rezolvarea problemei VVP.

* *
*

Am obţinut aşadar, pentru sistemul diferenţial din 1.2, două soluţii şi anume:

$$w_1=e^{\lambda_1 t}\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \text{ şi } w_2=e^{\lambda_2 t}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nici una nu verifică, la momentul iniţial, condiţia $w(0)=(-1,1)^T$. Construim, pentru aceasta, o soluţie – combinaţie liniară a celor două:

$$w=c_1w_1+c_2w_2.$$

Observăm, pentru început, că orice asemenea w este soluţie a sistemului diferenţial $\frac{dw}{dt}=Aw$; mulţimea acestor combinaţii este un spaţiu vectorial (aici unul complex) numit **spaţiul soluţiilor.**

Din condiţia iniţială

$$c_1w_1(0)+c_2w_2(0)=w_0,$$

rezultă sistemul liniar

$$-ic_1+ic_2=-1, c_1+c_2=1,$$

din care

$$c_1=\frac{1-i}{2}, c_2=\frac{1+i}{2}.$$

Înlocuindu-le în expresia lui w găsim

$$w=e^t\begin{bmatrix}-\cos t-\sin t\\ \cos t-\sin t\end{bmatrix},$$

adică soluţia căutată.

OBSERVAŢIE. Deşi obţinută prin rezolvarea unei probleme VVP în complex, soluţia problemei cu condiţii iniţiale a sistemului diferenţial real este **reală**, valorile proprii complexe făcând să intervină în ea termenii "oscilatorii" în sin şi cos.

EXERCIŢIUL 4.3

a) P fiind o matrice de proiecţie, cf. ex. 4.1.c, $Spec(P)\subset\{0,1\}$. Explicaţi "geometric" care va fi spaţiul său propriu corespunzător v.p. $\lambda=1$?

b) Verificaţi aceasta, determinând spaţiile proprii pentru

$$P=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}.$$

Cum se poate defini "geometric" spaţiul propriu corespunzător v.p. $\lambda=0$?

c) Determinaţi soluţia problemei cu condiţii iniţiale $\frac{dx}{dt}=-y, \frac{dy}{dt}=x, x(0)=0, y(0)=1$.

§4. Geometria spaţiilor $\mathbb{C}^n$

Obligaţi, prin natura problemei VVP, să trecem din real în complex, se impun, pentru început, câteva precizări legate de această schimbare de cadru.

Algebra spaţiilor $\mathbb{C}^n$ a fost expusă simultan cu cea a spaţiilor $\mathbb{R}^n$, în capitolul 2. Geometria spaţiilor $\mathbb{R}^n$ este indisolubil legată de definiţia şi proprietăţile produsului scalar. Pentru a face o asemenea geometrie în $\mathbb{C}^n$ trebuie, deci, să începem cu o definiţie a p.s.

Remarcăm, chiar de la început, că definiţia $\langle x,y\rangle=x^Ty$ este inutilizabilă în $\mathbb{C}^n$ deoarece (printre altele) proprietatea esenţială (3).1.1 şi-ar înceta valabilitatea. (E.g. $x=(1,i)^T$ ar avea lungimea $\|x\|=0$.)

Pentru a da o formă de prezentare, a noii geometrii, cât mai apropiată de cea din cap.3, începem prin a defini

(4.1) Transpunerea complexă sau hermitică.

Este operaţia prin care matricea $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ se transpune şi, în acelaşi timp, toate elementele sale se conjugă complex. NOTAŢIE: A^*.

Reamintim că fiecare număr complex z se poate reprezenta sub una din formele

$$z=x+iy=r(\cos\theta+i\sin\theta), (r\geq 0)$$

iar în planul (complex) Oxy unde: Ox = **axa reală** şi Oy = **axa imaginară**, prin punctul (**afixul**) z.

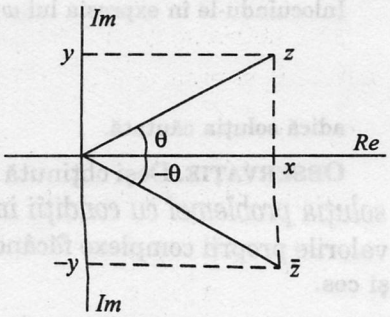
Conjugatul complex al lui z, notat $\bar{z}$, este numărul complex

$$\bar{z}=x-iy=r(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)),$$

şi au loc echivalenţele

$$z=\bar{z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}\ ;$$

$$z=-\bar{z}\Leftrightarrow z\in \mathit{Im}.$$



Aşadar $A^*=\overline{A}^T$.

EXEMPLU

$$\begin{bmatrix} 1 & 3-i & i \\ 1+i & 2 & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 3+i & 2 \\ -i & 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

(4.2) PROPRIETĂŢILE transpunerii complexe sunt:

(1) $(A+B)^*=A^*+B^*$;

(2) $(\alpha A)^*=\overline{\alpha}A^*$;

(3) $(A^*)^*=A$;

(4) $(AB)^*=B^*A^*$;

(5) $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$, dacă A este nesingulară.

Comparaţi cu (2).1.2.

(4.3) Produsul scalar complex se defineşte pentru orice $x,y\in\mathbb{C}^n$ astfel

$$\langle x,y\rangle=x^*y=\sum_{i=1}^{n}\overline{x_i}y_i,$$

iar **norma** (lungimea)

$$\textbf{(4.4)}\qquad \|x\|=\sqrt{x^*x}=\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

OBSERVAŢIE. Aceste noţiuni ale cazului complex **extind** noţiunile corespunzătoare din cazul real. Altfel spus, când $x,y\in\mathbb{R}^n: x^*=x^T$ deci $\|x\|=\sqrt{x^Tx}$ şi $\langle x,y\rangle=x^*y=x^Ty$.

Iată extensia proprietăţilor (3).1.11-15 ale produsului scalar la cazul complex:

PROPRIETĂŢILE produsului scalar complex:

(4.5) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$;

(4.6) $\langle x,y+z\rangle=\langle x,y\rangle+\langle x,z\rangle$;

(4.7) $\langle x,\alpha y\rangle=\alpha\langle x,y\rangle$;

(4.8) $x\neq 0 \Rightarrow \langle x,x\rangle > 0$.

Cu excepţia primei proprietăţi, ele coincid cu cele din cazul real.

Geometria spaţiului $\mathbb{C}^n$ se obţine **extinzând**, în sensul deja explicat, noţiunile şi proprietăţile spaţiului $\mathbb{R}^n$.

(4.9) EXEMPLU

Dacă $A\in M_{m,n}(\mathbb{C})$, atunci spaţiul liniilor nu mai este ortogonal pe nucleu şi spaţiul coloanelor nu mai este ortogonal pe nucleul stâng.

Fie $A=\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & i\\ 0 & 0\end{bmatrix}=U$.

Spaţiul liniilor este generat de vectorul $(1, i)^T$, iar nucleul – de $(-i, 1)^T$. Deoarece $\langle(1, i)^T, (-i, 1)^T\rangle = 1\,(-i) + (-i)1 = -2i \neq 0$, cele două spaţii nu sunt ortogonale. Pentru a obţine rezultatele importante din §(3).2 şi §(3).3 vom redefini spaţiile fundamentale ale unei matrice complexe drept

$$\Im(A^*)\ ,\ \mathbb{N}(A)\ ,\ \Im(A) \text{ şi } \mathbb{N}(A^*).$$

Ele reprezintă **extinderile** noţiunilor studiate în §(2).5. Extinderi corespunzătoare se fac pentru fiecare din noţiunile definite în capitolul 3. Iată câteva din acestea:

(4.10) Matricea $A\in M_n(\mathbb{C})$ este "simetrică în complex", sau **hermitică**, dacă $A^*=A$.

(4.11) Matricea $A\in M_n(\mathbb{C})$ este "de proiecţie în complex" dacă $A^*=A$ şi $A^2=A$ (cf. (3).5.2).

(4.12) Matricea $U\in M_n(\mathbb{C})$ este "ortogonală în complex" sau **unitară** dacă $U^*U=I$ (cf.(3).5.4.1).

Rezultatele referitoare la noţiuni din geometria lui $\mathbb{R}^n$ rămân, în general, valabile pentru extensiile lor din $\mathbb{C}^n$.

EXERCIŢIUL 4.4

a) Un număr complex de modul 1 (numit şi **unitar**) are forma

$$z=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}.$$

Explicaţi poziţia sa în planul complex şi proprietăţile:

(i) z_1,z_2 unitare $\Rightarrow z_1z_2$ unitar;

(ii) z unitar $\Rightarrow z^{-1}$ unitar.

Arătaţi că dacă $z_0=e^{i\theta_0}$ este fixat, atunci transformarea $z\to z_0z$ reprezintă "rotaţia în sens direct, cu unghiul θ_0, în jurul originii".

b) Ortogonalizaţi Gram-Schmidt şi normaţi vectorii din $\mathbb{C}^3$:

$$a_1=(1,0,1)^T,\ a_2=(i,1,1)^T,\ a_3=(0,1,i)^T.$$

c) Construiţi matricea de proiecţie a vectorilor lui $\mathbb{C}^n$ pe direcţia versorului $u\in\mathbb{C}^n$.

§5. Problema VVP pentru matricele hermitice

Matricele simetrice, a căror importanţă a apărut în §(1).7 şi §(1).8, au ca extensie în complex, matricele hermitice (de la numele matematicianului francez C. Hermite).Pentru acestea problema VVP are o soluţie remarcabil de simplă, aşa cum rezultă şi din următoarele trei proprietăţi în care

$$A=A^*\in M_n(\mathbb{C}).$$

(5.1) *Pentru orice* $x\in\mathbb{C}^n$ *numărul* x^*Ax este **real.**

(5.2) Toate valorile proprii ale matricei A *sunt* ***reale.***

(5.3) *Dacă* λ,μ *sunt valori proprii distincte (pentru A) atunci subspaţiile proprii corespunzătoare lor, sunt* ***ortogonale.***

Demonstraţii:

5.1: Notând $z=x^*Ax$, $\overline{z}=z^*=(x^*Ax)^*=x^*A^*x^{**}=z$, deci $z\in\mathbb{R}$.

5.2: Dacă $\lambda\in Spec(A)$, atunci $\exists x\in\mathbb{C}^n, x\neq\mathbf{0}$ a.î. $Ax=\lambda x$; de unde

$$x^*Ax=\lambda x^*x=\lambda\|x\|^2,$$

deci cf. 5.1, $\lambda\in\mathbb{R}$.

5.3: Arătăm că $\lambda,\mu\in Spec(A), \lambda\neq\mu$ şi $Ax=\lambda x, Ay=\mu y$ implică $x^*y=0$.

Din $Ax=\lambda x$ rezultă $x^*A^*=\overline{\lambda}x^*$, deci, cf. hermiticităţii matricei A: $x^*Ay=\lambda x^*y$. Pe de altă parte $Ay=\mu y$, deci $x^*Ay=\mu x^*y$. Scăzând relaţiile obţinute găsim $x^*y=0$ (deoarece $\lambda-\mu\neq 0$). ■

(5.4) EXEMPLE

1) $A=\begin{bmatrix}3 & i\\ -i & 3\end{bmatrix}$ este hermitică, deci $Spec(A)\subset\mathbb{R}$. Într-adevăr $\lambda_1=4$ şi $\lambda_2=2$. Va trebui ca cei doi vectori proprii – corespunzători acestor valori proprii – să fie ortogonali.

$$(A-\lambda_1 I)x=\begin{bmatrix}-1 & i\\ -i & -1\end{bmatrix}x=\mathbf{0}, \text{ de unde } x=x_2\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix};$$

$$(A-\lambda_2 I)x=\begin{bmatrix}+1 & i\\ -i & +1\end{bmatrix}x=\mathbf{0}, \text{ deci } x=x_2\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix} \text{ şi}$$

$$<\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix}>=i^2+1=0.$$

2) $A=\begin{bmatrix}5 & -1 & -1\\ -1 & 5 & -1\\ -1 & -1 & 5\end{bmatrix}$ este simetrică, deci hermitică. Ea are valorile proprii $\lambda_1=6$ (dublă) şi $\lambda_2=3$. Vectorii proprii corespunzători vor fi:

pentru λ_1: $(-1,1,0)^T$ şi $(-1,0,1)^T$;

pentru λ_2: $(1,1,1)^T$.

Verificaţi ortogonalităţile între ei.

EXERCIŢIUL 4.5

a) $A \in M_n(\mathbb{C})$ este **antihermitică** dacă $A^* = -A$, iar în cazul real ($A^T = -A$) **antisimetrică**.

Arătaţi că o matrice antihermitică are pe diagonală numere imaginare, iar una antisimetrică are pe diagonală zerouri. Daţi câte un exemplu din fiecare tip.

b) Arătaţi ca dacă A este antihermitică atunci numărul x^*Ax este imaginar, ca şi valorile sale proprii.

c) Arătaţi că matricele antihermitice verifică proprietatea 5.3.

§6. Teorema spectrală şi descompunerea spectrală

Sinteza rezolvării problemei VVP pentru o matrice hermitică se află în

(6.1) TEOREMA SPECTRALĂ. *Dacă* $A=A^* \in M_n(\mathbb{C})$ *atunci există o matrice unitară* U *a.î.*

$$U^*AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

notată Λ, *unde* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ *sunt valorile proprii ale matricei* A.

Asupra semnificaţiei teoremei vom reveni.

Demonstraţia sa se bazează pe un alt rezultat fundamental.

(6.2) LEMA LUI SCHUR. *Pentru orice matrice* A *din* $M_n(\mathbb{C})$ *există* U *unitară a.î.* $U^*AU=T$, *unde* T *este* **superior triunghiulară**.

Demonstraţia lemei o vom face în §7. Revenim la demonstraţia teoremei 6.1.

Dacă $T=U^*AU$ este matricea superior triunghiulară corespunzătoare matricei hermitice A, rezultă:

$$T^* = (U^*AU)^* = U^*A^*U^{**} = T.$$

Aşadar $\overline{t_{kl}} = t_{lk}$, ceea ce arată că şi elementele aflate deasupra diagonalei sunt nule, deci T este **diagonală**.

De ce $T=\Lambda$? Vom arăta în paragraful următor că A şi T au aceleaşi valori proprii $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. Pentru o matrice triunghiulară, acestea sunt elementele diagonale (ex. 4.2.b), deci $T=\Lambda$ şi teorema este demonstrată. ■

(6.3) EXEMPLE (continuare)

1) Reluăm A din 5.4.1.

Cf. teoremei spectrale, există matricea unitară U a.î. $U^*AU = \begin{bmatrix} 4 & \\ & 2 \end{bmatrix} = \Lambda$. Rescriind relaţia sub forma $AU = U\Lambda$ şi notând $U=[u_1 | u_2]$, ea se desface în egalităţile de coloane

$$Au_1 = 4u_1 \text{ şi } Au_2 = 2u_2 \text{ (de ce?)}.$$

Aşadar u_1 şi u_2 sunt vectori proprii ai matricei A corespunzători celor două valori proprii $\lambda_1=4, \lambda_2=2$. Fiind coloanele unei matrice unitare, ei trebuie să fie

ortonormaţi (condiţie similară cu cea pentru matricele ortogonale; cf. 4.12). Se vor obţine aşadar prin normarea celor doi vectori proprii (ortogonali!) anterior calculaţi $(i,1)^T,(-i,1)^T$. Rezultă

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Reluând exemplul 5.4.2, vectorii proprii corespunzători v.p. duble $\lambda_1=6$ **trebuie ortogonalizaţi**. Aplicând Gram-Schmidt găsim $(-1,1,0)^T,(-1,-1,2)^T$ a.î., după normare, matricea ortogonală va fi

$$U=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \text{ iar } U^TAU=\begin{bmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 3 \end{bmatrix}.$$

(6.4) OBSERVAŢII. 1) Aşadar, ***coloanele matricei U sunt vectorii proprii ai matricei A, corespunzând valorilor proprii de pe diagonala lui Λ.*** Printr-o ordonare convenabilă a lor, am putut obţine în Λ ordonarea valorilor proprii $\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_n$.

2) În cazul unei matrice reale şi simetrice (exemplul 2), vectorii proprii sunt reali – ca soluţii ale sistemelor $(A-\lambda_i I)x=\mathbf{0}$ având coeficienţi reali ($\lambda_i\in\mathbb{R}$, cf.5.1). Matricea U va fi ortogonală: $U^{-1}=U^*=U^T$, iar relaţia din teorema spectrală capătă forma

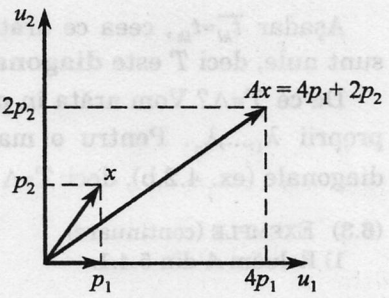
$$U^TAU=\Lambda.$$

(6.5) EXEMPLE de descompunere spectrală:

Teorema spectrală descrie **geometric** acţiunea matricei hermitice (simetrice) asupra vectorilor lui $\mathbb{C}^n(\mathbb{R}^n)$. Reluăm exemplele 1 şi 2.

1) Din teorema spectrală

$$A=U\Lambda U^*=[u_1|u_2]\begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix}=\lambda_1u_1u_1^*+\lambda_2u_2u_2^*.$$



Matricele $P_1=u_1u_1^*$, $P_2=u_2u_2^*$ sunt matricele de proiecţie ale vectorilor lui $\mathbb{C}^2$ pe direcţiile proprii u_1 şi u_2 ale matricei A. (cf. ex. 4.4.c.). Am găsit deci

$$A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2$$

şi orice $x\in\mathbb{C}^2$ se va transforma în $Ax=\lambda_1p_1+\lambda_2p_2$ unde p_i este proiecţia sa pe axa (proprie) u_i.

Rescriind relaţia $I=UU^*$ obţinem $I=[u_1|u_2]\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix}=u_1u_1^*+u_2u_2^*=P_1+P_2$.

În plus $P_1P_2=u_1u_1^*u_2u_2^*=u_10u_2^*=\mathbf{0}$.

$$A=U\Lambda U^T-[u_1|u_2|u_3]\begin{bmatrix}6&&\\&6&\\&&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^T\\u_2^T\\u_3^T\end{bmatrix}=6(u_1u_1^T+u_2u_2^T)+3u_3u_3^T.$$

Deoarece $P_1=u_1u_1^T$, $P_2=u_2u_2^T$ verifică $P_1P_2=\mathbf{0}$, cf. ex. 3.5.1.c, matricea $P=P_1+P_2$ va fi de proiecţie (pe planul determinat de u_1 şi u_2), iar

$$A=6P+3P_3.$$

Similar, din $UU^T=I$ deducem $P+P_3=I$.

(6.6) Descompunerea spectrală. *În general, pentru o matrice hermitică $A\in M_n(\mathbb{C})$, având valorile proprii distincte $\lambda_1,...,\lambda_q$ $(q\le n)$, există matricele $P_1,..,P_q$, de proiecţie pe fiecare din spaţiile proprii corespunzătoare, a.î.*

$$A=\lambda_1P_1+...+\lambda_qP_q,$$

iar $P_1+...+P_q=I$ şi $P_iP_j=\mathbf{0}$, pentru $i\ne j$.

EXERCIŢIUL 4.6

a) Pentru fiecare din următoarele matrice hermitice (simetrice) construiţi matricea unitară (ortogonală) a.î. $U^*AU=\Lambda$ $(Q^TAQ=\Lambda)$:

(i) $\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$; (ii) $\begin{bmatrix}3&2+2i\\2-2i&1\end{bmatrix}$;

(iii) $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$; (iv) $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$.

b) Construiţi, pe baza rezultatelor din exerciţiul precedent, descompunerea spectrală a fiecăreia din cele patru matrice hermitice (simetrice).

c) Orice matrice de proiecţie este hermitică (cf. 4.11).Construiţi descompunerea sa spectrală.

d) Reluând demonstraţia teoremei 6.1, arătaţi că ea rămâne adevărată şi în cazul când matricea A este antihermitică $(A^*=-A)$.

§7. Triunghiularizarea

Reducerea la o formă triunghiulară a matricei A este un instrument de studiu al problemei VVP. Întrucât am întîlnit un procedeu similar şi în teoria sistemelor liniare, trebuie să facem câteva precizări.

Transformările prin care vom reduce, în acest capitol, matricele, sunt **diferite** de transformările procesului de eliminare succesivă. Dacă acelea erau proiectate a.î. să nu modifice soluţia sistemului, aceste transformări nu vor modifica valorile proprii ale matricei A, iar vectorii proprii corespunzători se vor transforma de o manieră controlată (ex. 4.7.b).

(7.1) DEFINIŢIE. *Matricele* $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ *sunt* ***asemenea*** *dacă există matricea* ***nesingulară*** $S\in M_n(\mathbb{C})$ *a.î.*

$$S^{-1}AS=B.$$

(7.2) PROPRIETATE. *Două matrice asemenea au acelaşi polinom caracteristic (deci aceleaşi valori proprii).*

Demonstraţie: $S^{-1}(A-\lambda I)S=B-\lambda I$ are loc cf. asemănării (de ce?). Aplicând determinanţii (anexa B): $\det S^{-1}\times\det(A-\lambda I)\times\det S=\det(B-\lambda I)$. ■

Transformările matricei A presupuse de teorema spectrala şi de lema lui Schur sunt transformări de asemănare de un tip special:

(7.3) DEFINIŢIE. $A,B\in M_n(\mathbb{C})$ *sunt* ***unitar-asemenea*** *dacă există matricea* ***unitară*** U *a.î.* $U^{-1}AU=B$.

Dacă U este unitară, $U^{-1}=U^*$ (cf. 4.12) şi relaţia de unitar-asemănare va fi $U^*AU=B$.

Procedeul, prin care o matrice A este transformată succesiv în matrice unitar-asemenea cu ea până la obţinerea matricei triunghiular superioare T, este **recursiv** şi conţine $n-1$ etape de calcul, la fel ca şi procesul de eliminare succesivă Gauss. Procedând ca în §(1).1, îl vom explica într-un caz particular:

(7.4) Triunghiularizarea matricei $A\in M_4(\mathbb{C})$.

Etapa I constă în determinarea matricei unitare U_1 a.î.

$$U_1^*AU_1=\begin{bmatrix}*&*&*&*\\0&*&*&*\\0&*&*&*\\0&*&*&*\end{bmatrix} \tag{1}$$

Plecând de la o pereche caracteristică (λ,v) pentru A, i.e. $Av=\lambda v, v\neq\mathbf{0}$ şi alegând $u_1=\dfrac{v}{\|v\|}$ îl completăm până la o bază ON a lui $\mathbb{C}^4$: $[u_1|...|u_n]=U_1$. (Completarea se face cf. (2).4.7, iar baza obţinută se ortogonalizează Gram-Schmidt şi normează.)

Întrucât $Au_1=\lambda u_1$, rezultă $AU_1=U_1A_1$, unde

$$A_1=\begin{bmatrix}\lambda&*&*&*\\0&*&*&*\\0&*&A_1'&*\\0&*&*&*\end{bmatrix}.$$

(Am notat A_1' submatricea 3×3 aflată în colţul din dreapta jos.) Această relaţie fiind echivalentă cu (1), trecem la

Etapa a II-a: Considerând submatricea A_1', construim, ca mai sus, o matrice unitară V a.î.

$$V^*A_1'V=\begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Să observăm că:

1) matricea $U_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & V & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$ este unitară,

2) $$U_2^*U_1^*AU_1U_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & V^* & \\ 0 & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A_1' & \\ 0 & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & V & \\ 0 & & & \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & V^*A_1'V & \\ 0 & & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & A_2' \end{bmatrix}.$$

Etapa a III-a: Construind, pentru A_2', matricea unitară W a.î.

$$W^*A_2'W=\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix},\ \text{alegem}\ U_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & W & \end{bmatrix},\ \text{care este unitară.}$$

În final

$$U_3^*U_2^*U_1^*AU_1U_2U_3=\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}=T.$$

Prin urmare am obţinut $U=U_1U_2U_3$ unitară (cf.(3).5.8) a.î. $U^*AU=T$. ■

Observaţie (*utilitatea formelor canonice*). Efortul necesar reducerii unei matrice la o formă canonică (e.g. triunghiulară) este compensat de simplitatea acesteia din urmă şi care permite utilizarea, în cazul formelor canonice, a unor algoritmi mult mai simpli decât în cazul general. Vom ilustra afirmaţia, utilizând forma triunghiulară la verificarea următoarei proprietăţi a matricelor pătratice:

(7.5) TEOREMA CAYLEY-HAMILTON. *Orice matrice pătratică îşi anulează propriul polinom caracteristic.*

Facem verificarea acestei proprietăţi pentru matricele din $M_3(\mathbb{C})$. Mai întâi pentru o matrice triunghiulară

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ & t_{22} & t_{23} \\ & & t_{33} \end{bmatrix}.$$

Polinomul său caracteristic este (ex. 4.2.b)

$$(t_{11}-\lambda)(t_{22}-\lambda)(t_{33}-\lambda) \tag{1}$$

şi înlocuirea lui λ cu T conduce la produsul de matrice

$$(t_{11}I-T)(t_{22}I-T)(t_{33}I-T) \tag{2}$$

având factorii de forma

$$\begin{bmatrix} 0 & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * & * \\ & 0 & * \\ & & * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & 0 \end{bmatrix}.$$

Arătaţi că, prin înmulţire, se obţine matricea nulă. Aşadar T verifică teorema.

Pentru orice $A\in M_3(\mathbb{C})$ există, cf. lemei Schur, o matrice superior triunghiulară T unitar-asemenea cu A, i.e. $U^*AU=T$ sau $A=UTU^*$.

Întrucât A şi T au acelaşi polinom caracteristic (cf.7.2), vom înlocui λ cu A în (1) şi obţine

$$(t_{11}I-A)(t_{22}I-A)(t_{33}I-A). \tag{3}$$

Conform relaţiei între A şi T rezultă

$$t_{11}I-A=t_{11}UU^*-UTU^*=U(t_{11}I-T)U^*, \text{ etc.},$$

iar (3) devine

$$U(t_{11}I-T)U^*U(t_{22}I-T)U^*U(t_{33}I-T)U^*.$$

Deoarece matricea (2) este nulă rezultă că şi acest produs este matricea nulă. ■

EXERCIŢIUL 4.7

a) Fie $Q,R\in M_n(\mathbb{R})$ a.î. Q este ortogonală. Arătaţi că matricele $A=QR$ şi $A_1=RQ$ sunt asemenea. (Acesta este pasul esenţial în "algoritmul QR"- cea mai importantă metodă practică de rezolvare a problemei VVP.)

b) Cunoscând S a.î. $S^{-1}AS=B$, arătaţi că pentru fiecare vector propriu x al matricei B, corespunzător v.p. $\lambda\in Spec(B)=Spec(A)$, $y=Sx$ este vector propriu al matricei A (corespunzător aceluiaşi λ).

c) Determinaţi matricea unitară U şi pe cea superior triunghiulară T a.î.

$$U^*\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}U=T.$$

§8. Diagonalizarea şi jordanizarea

Cea mai simplă formă canonică a unei matrice pătratice este, desigur, forma diagonală.

(8.1) **DEFINIŢIE.** *$A\in M_n(\mathbb{C})$ se numeşte* ***diagonalizabilă*** *dacă este asemenea cu o matrice diagonală; i.e. dacă există S nesingulară a.î.*

$$S^{-1}AS=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

Matricele hermitice, ca şi alte tipuri de matrice, sunt diagonalizabile; altele sunt nediagonalizabile (cf. 8.8.2). Spre a formula criterii generale de recunoaştere a acestei proprietăţi, plecăm de la următoarea

(8.2) **OBSERVAŢIE.** Relaţia $AS=S\Lambda$ cu $S=[x_1|\dots|x_n]$, este echivalentă condiţiilor $Ax_i=\lambda_i x_i$ $(i=\overline{1,n})$.

Aşadar λ_i sunt valorile proprii, iar x_i vectorii proprii ai matricei A.

În plus, nesingularitatea lui S probează că $x_1,\dots,x_n$ alcătuiesc un sistem liniar independent, deci o bază a spaţiului, iar criteriul se va putea formula astfel

(8.3) **TEOREMĂ.** *$A\in M_n(\mathbb{C})$ este diagonalizabilă dacă şi numai dacă posedă un sistem de n vectori proprii liniar independenţi. În acest caz, aşezându-i drept coloane ale lui S, rezultă*

$$S^{-1}AS=\Lambda.$$

Un caz frecvent întâlnit este cel în care polinomul caracteristic al matricei A are toate **rădăcinile simple** (i.e. polinoamele p_A şi $p_A'(\lambda)$ sunt **prime între ele**). Atunci A este diagonalizabilă în virtutea următoarei

(8.4) **LEMĂ.** *Vectorii proprii ce corespund unor valori proprii* **distincte** *sunt liniar independenţi.*

Demonstraţie. (Inducţie după numărul lor.)

În cazul unui singur vector propriu, proprietatea este imediată.

O vom presupune adevărată pentru $k-1$ vectori proprii. Fie $x_1,\dots,x_{k-1},x_k$ vectorii proprii corespunzători valorilor proprii distincte $\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1},\lambda_k$ ale matricei A.

Dacă $c_1x_1+\dots+c_{k-1}x_{k-1}+c_kx_k=\mathbf{0}$ atunci, prin amplificare cu A,

$c_1Ax_1+\dots+c_{k-1}Ax_{k-1}+c_kAx_k=\mathbf{0}$, i.e. $c_1\lambda_1x_1+\dots+c_{k-1}\lambda_{k-1}x_{k-1}+c_k\lambda_kx_k=\mathbf{0}$.

Scăzând prima relaţie, înmulţită cu λ_k, din a doua relaţie, obţinem

$$c_1(\lambda_1-\lambda_k)x_1+\dots+c_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x_{k-1}=\mathbf{0}.$$

De aici, cf. ipotezei de inducţie, $c_i(\lambda_i-\lambda_k)=0$ şi deoarece $\lambda_i-\lambda_k\neq 0$, rezultă $c_i=0$ pentru $i=\overline{1,k-1}$. Revenind cu aceste valori în prima relaţie obţinem $c_k=0$. ■

Rezultatul se extinde şi la cazul în care unor v.p. (multiple) le corespund sisteme liniar independente de vectori proprii.

(8.5) **LEMĂ.** *Reunind sisteme liniar independente de vectori proprii, corespunzătoare unor valori proprii distincte ale lui A, obţinem un sistem liniar independent.*

Întrucât se arată că

(8.6) *dimensiunea unui spaţiu propriu* **nu depăşeşte** *multiplicitatea* – ca rădăcină pentru p_A – a *valorii proprii corespunzătoare*, din 8.3 şi 8.5 rezultă

(8.7) **TEOREMĂ.** *$A \in M_n(\mathbb{C})$ este diagonalizabilă dacă şi numai dacă fiecărei valori proprii îi corespunde un număr de vectori proprii (liniar independenţi) egal cu multiplicitatea sa (ca rădăcină a polinomului caracteristic).*

(8.8) EXEMPLE

1) $A=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&3&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ are valorile proprii 0, 1, 3 **distincte**. Deci este diagonalizabilă.

Vectorii proprii respectivi sunt coloanele matricei

$$S=\begin{bmatrix}-2&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix} \text{ a.î. } S^{-1}AS=\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&3\end{bmatrix}.$$

2) $A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$ are valoarea proprie dublă $\lambda=0$ şi un singur vector propriu $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. Nu este aşadar diagonalizabilă.

3) $A=\begin{bmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{bmatrix}$ are v.p. simplă -1 şi v.p. dublă 2. Corespunzător găsim v.p. $(1,1,1)^T$ şi respectiv $(1,1,0)^T, (-1,0,3)^T$.

Luând $S=\begin{bmatrix}1&1&-1\\1&1&0\\1&0&3\end{bmatrix}$ rezultă $S^{-1}AS=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{bmatrix}$.

(8.9) OBSERVAŢIE (*Matrice comutabile).*

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ comută dacă $AB=BA$. Două matrice diagonalizabile având **aceiaşi vectori proprii**, comută (cf. ex. 4.8.c).

Reciproca este adevărată. Tratăm cazul valorilor proprii simple.

Dacă vectorul nenul x verifică $Ax=\lambda x$ şi $Bx \neq \mathbf{0}$, atunci, deoarece

$$ABx=BAx=B\lambda x=\lambda Bx,$$

Bx va fi v.p. corespunzător aceluiaşi λ ca şi x. Deci $Bx=\mu x$ (i.e. cei doi sunt

coliniari, căci aparţin aceluiaşi spaţiu propriu 1-dimensional, cf. 8.6). x va fi aşadar v.p. pentru B. ■

O matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$ având mai puţin de n *vectori proprii (liniar independenţi)*, deci nediagonalizabilă, poate fi redusă, printr-o transformare de asemănare $A \to S^{-1}AS$, la o formă triunghiulară specială numită *forma sa Jordan*: J_A.

Un exemplu de formă Jordan este matricea din 8.8.2. Iată încă două exemple:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ şi } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Aşadar o **matrice Jordan** este o matrice triunghiulară pe a cărei diagonală se înşiruie alte submatrice triunghiulare (numite **celule Jordan**): una – în primele exemple şi două în ultimul. Pe diagonala unei celule se află o singură valoare proprie, aceasta putând ocupa şi diagonala altor celule din J_A.

Rescriem relaţia $J_A=S^{-1}AS$, dintre A şi forma sa Jordan, în cazul ultimului exemplu, sub forma $AS=SJ_A$, $S=[x_1|x_2|x_3|x_4]$. Similar celor discutate în 8.2, găsim pentru baza S (numită **bază Jordan**) următoarele relaţii

$$Ax_1=2x_1, Ax_2=2x_2+x_1; Ax_3=(-1)x_3, Ax_4=(-1)x_4+x_3.$$

Din prima şi a treia deducem că x_1 şi x_3 sunt vectori proprii corespunzători celor două valori proprii (2 şi –1) ale matricei A, pe când x_2 şi x_4 sunt vectori **"asociaţi"** celor doi vectori proprii prin relaţiile de mai sus.

În general, pe diagonala lui J_A vor apărea – pentru fiecare valoare proprie λ – atâtea celule câţi vectori proprii are A.[1]

În rezumat, are loc următoarea:

(8.10) **TEOREMĂ.** *Dacă $A\in M_n(\mathbb{C})$ are s vectori proprii (liniar independenţi), atunci există o matrice Jordan J_A având pe diagonală s celule Jordan şi o matrice S (nesingulară) a.î.*

$$S^{-1}AS=J_A.$$

EXERCIŢIUL 4.8

a) Verificaţi care dintre următoarele matrice este diagonalizabilă:

$$\text{(i)}A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(ii)}A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix};$$

[1] Dimensiunile acestor celule, adică **structura bazei Jordan**, este o problemă complexă în care nu intrăm aici.

(iii) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 0 & 2 & \dots & n \\ & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}$; (iv) $B=A+\lambda I$,

unde A este, pe rând, fiecare din matricele anterioare, iar λ este un număr fixat.

b) Analizaţi condiţiile în care o matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$ **de rang 1** diagonalizează.

Indicaţie: Dacă $n>1$, atunci $0\in Spec(A)$ şi acestei valori proprii îi corespund $n-1$ vectori proprii. Rămâne de analizat situaţia ultimei perechi caracteristice matricei A.

c) Matricele A şi B sunt **simultan diagonalizabile** dacă există S nesingulară a.î. $S^{-1}AS$ şi $S^{-1}BS$ să fie diagonale. Arătaţi că în acest caz $AB=BA$ (ele comută).

d) Scrieţi relaţiile pentru cele trei coloane din S deduse din

$$S^{-1}AS=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

e) Cum arată J_A dacă $A\in M_3(\mathbb{C})$ are:

(i) o singură v.p. şi un singur vector propriu ?

(ii) o singură v.p. şi doi vectori proprii?

f) Aceeaşi problemă ca la punctul (e), dar pentru $A\in M_4(\mathbb{C})$.

§9. Metode pentru rezolvarea problemelor liniare cu condiţii iniţiale

Ne oprim la două aplicaţii majore ale formelor canonice de matrice:

1) *recurenţele liniare* şi

2) *exponenţiala unei matrice.*

Ambele se bazează pe calculul **puterilor** A^k ale matricei $A\in M_n(\mathbb{C})$.

Să analizăm acest calcul pentru A **diagonalizabilă**. Deoarece $A=S\Lambda S^{-1}$, rezultă:

$$A^2=S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1}=S\Lambda^2 S^{-1}$$

şi, prin inducţie

(9.1) $$A^k=S\Lambda S^{-1}S\Lambda S^{-1}\dots S\Lambda S^{-1}=S\Lambda^k S^{-1}.$$

9.1. Recurenţe liniare

În §(1).7 am văzut cum se poate utiliza metoda diferenţelor finite pentru a transforma o problemă la limită pentru o ecuaţie diferenţială într-un sistem algebric liniar. Aceeaşi metodă se poate utiliza şi la rezolvarea problemelor cu condiţii iniţiale (cf. 1.2) transformând ecuaţia diferenţială într-o **ecuaţie cu diferenţe finite**. Soluţia unei astfel de ecuaţii este un şir de numere $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definit printr-o relaţie de recurenţă.

În cazul liniar, ecuaţia capătă forma

(9.2) $a_{k+n}=\alpha_1 a_{k+n-1}+\ldots+\alpha_n a_k$, $k\in\mathbb{N}$,

iar condiţiile iniţiale dau "valorile de pornire" $a_0,\ldots,a_{n-1}$.

(9.3) EXEMPLU

Şirul lui Fibonacci este un şir de numere reale $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ care respectă legea

$$F_{k+2}=F_{k+1}+F_k \ (k\in\mathbb{N}). \tag{1}$$

F_0 şi F_1 se numesc **condiţiile iniţiale** ale recurenţei. Pornind de la ele şi utilizând (1), putem calcula valoarea oricărui termen F_k.

Pentru a găsi o formulă explicită de calcul a lui F_k (funcţie de k),considerăm şirul de vectori bidimensionali $u_k=(F_{k+1},F_k)^T$, relaţiile

$$F_{k+2}=F_{k+1}+F_k \ , \ F_{k+1}=F_{k+1}$$

scriindu-se matriceal astfel

$$u_{k+1}=Au_k, \text{ unde } A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Deci recurenţa de **ordinul al doilea** (1) – a devenit, pentru şirul de vectori $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, o recurenţă de **ordinul întâi**. Aplicând termenului său general u_k relaţia (2), găsim

$$u_k=Au_{k-1}=AAu_{k-2}=\ldots=A^k u_0. \tag{3}$$

Întrucât u_0 conţine condiţiile iniţiale F_0, F_1, aceasta este o formulă **explicită** de calcul pentru termenul general al şirului $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. ■

În perfectă analogie, vom introduce pentru recurenţa, de **ordinul** n, 9.2 şirul de vectori n-dimensionali $u_k=(a_{k+n-1},a_{k+n-2},\ldots,a_k)^T$ a cărui lege de formare se obţine transcriind matriceal relaţiile

$$\begin{cases} a_{k+n} &= \alpha_1 a_{k+n-1}+\ldots+\alpha_n a_k \\ a_{k+n-1} &= a_{k+n-1} \\ \quad\vdots & \\ a_{k+1} &= a_{k+1} \end{cases}$$

Obţinem

(9.4) $u_{k+1}=Au_k$ unde $A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_{n-1} & \alpha_n\\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0\end{bmatrix}$

Această relaţie se transformă atunci, conform (3), în:

(9.5) $u_k=A^k u_0$, unde $u_0=(a_0,..,a_{n-1})^T$ este vectorul condiţiilor iniţiale.

Matricea A din exemplul 9.3 este simetrică, deci diagonalizabilă. Să presupunem, pentru a face explicitarea termenului general, că şi matricea$A$ din 9.4 este diagonalizabilă.

Înlocuim A^k cf. 9.1 şi notăm $S=[x_1|\ldots|x_n]$, $S^{-1}u_0=(c_1,\ldots,c_n)^T$. Rezultă

(9.6) $$u_k=[x_1|...|x_n]\begin{bmatrix}\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ \vdots \\ c_n\end{bmatrix}=c_1\lambda_1^k x_1+...+c_n\lambda_n^k x_n,$$ adică

(9.7) ***Termenul general*** u_k – *soluţia generală a recurenţei 9.2 – este o combinaţie liniară a soluţiilor particulare* $\lambda_1^k x_1,...,\lambda_n^k x_n$ *cu coeficienţii* $c_1,...,c_n$ *care depind de condiţiile iniţiale* u_0.

(Remarcaţi analogia cu soluţia w de la pag. 76 a problemei cu condiţii iniţiale[1].)

(9.8) OBSERVAŢIE. Presupunem că $|\lambda_1|\geq|\lambda_2|\geq ...\geq|\lambda_n|$, deci că am ordonat coloanele lui S pentru satisfacerea acestei condiţii şi scriem 9.6 sub forma

$$u_k=\lambda_1^k\left[c_1x_1+c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k x_2+...+c_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k x_n\right].$$

Numărul $|\lambda_1|$ se numeşte **raza spectrală** a matricei A. Dacă A satisface condiţia că *o singură valoare proprie are modulul egal cu raza sa spectrală* atunci, cu excepţia acelor vectori proprii ce corespund acestei valori proprii, ceilalţi sunt înmulţiţi cu coeficienţi de modul subunitar tinzând (pentru $k\to\infty$) la zero şi termenul general converge **în direcţie** către o direcţie proprie a lui A corespunzătoare valorii proprii de modul maxim.

EXERCIŢIUL 4.9.1

a) Aplicaţi formula 9.6 în cazul şirului u_k din exemplul 9.3 şi a condiţiilor iniţiale $u_0=(1,0)^T$. Arătaţi că, deşi $F_k\to\infty$, "rata de creştere" a sa F_{k+1}/F_k tinde la valoarea proprie de modul maxim a matricei $\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$.

b) O ecuaţie cu diferenţe finite 9.2 pentru care orice soluţie u_k tinde la **0** (pentru $k\to\infty$) se numeşte **asimptotic stabilă**. Arătaţi că acesta este cazul în care raza spectrală a matricei A din 9.4 este: $|\lambda_1|<1$.

c) În analogie cu seria de puteri $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+...$ convergentă pentru $|x|<1$, se defineşte **seria de puteri de matrice**

$$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+...$$

Presupunând A diagonalizabilă arătaţi că pentru convergenţa acestei serii trebuie ca raza spectrală a lui A să fie subunitară.

9.2. Matricea exponenţială e^{At}

Revenim la problema cu condiţii iniţiale pentru un sistem diferenţial. Am văzut (în 1.2 şi 3.3) că sistemul diferenţial $\frac{dw}{dt}=Aw$ admite soluţiile $w_i=e^{\lambda_i t}x_i$,

---

[1] A se vedea şi §9.2.

unde (λ_i, x_i) sunt perechile caracteristice ale matricei A a sistemului.

Soluţia sa **generală** fiind

$$w=c_1w_1+c_2w_2=c_1e^{\lambda_1 t}x_1+c_2e^{\lambda_2 t}x_2,$$

soluţia problemei (cu condiţii iniţiale) $w(0)=w_0$ se obţine determinând c_1, c_2 din relaţia $c_1x_1+c_2x_2=w_0$. Notând $S=[x_1|x_2]$, rezultă $c=S^{-1}w_0$ şi

(9.9) $$w=S\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}S^{-1}w_0=Se^{\Lambda t}S^{-1}w_0, \text{ unde } e^{\Lambda t}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}.$$

Ne reamintim din Analiza matematică dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $e^{\lambda t}$:

$$e^{\lambda t}=1+\frac{1}{1!}\lambda t+\frac{1}{2!}\lambda^2t^2+... \qquad (1)$$

Să înlocuim în ea λ cu $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}$; obţinem

$$I+\frac{1}{1!}\Lambda t+\frac{1}{2!}\Lambda^2t^2+... \qquad (2)$$

Întrucât $\Lambda^k=\begin{bmatrix}\lambda_1^k & \\ & \lambda_2^k\end{bmatrix}$, seria (2) capătă forma

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{1!}\lambda_1 t+\frac{1}{2!}\lambda_1^2t^2+... & \\ & 1+\frac{1}{1!}\lambda_2 t+\frac{1}{2!}\lambda_2^2t^2+...\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}=e^{\Lambda t}$$

Astfel seria (1) se extinde la matricele diagonale. Este primul pas în definirea unei importante funcţii cu valori- matrice şi care se notează e^{At}. Distribuind apoi produsul de matrice sumei infinite (2), obţinem

$$Se^{\Lambda t}S^{-1}=S(I+\frac{1}{1!}\Lambda t+\frac{1}{2!}\Lambda^2t^2+...)S^{-1}=I+\frac{1}{1!}S\Lambda S^{-1}t+\frac{1}{2!}S\Lambda^2S^{-1}t^2+...$$

şi înlocuind, cf. 9.1, $S\Lambda^kS^{-1}$ prin A^k, ajungem la

(9.10) $$I+\frac{1}{1!}At+\frac{1}{2!}A^2t^2+..., \ =e^{At}.$$

Formula 9.9 devine astfel

(9.11) $$w=e^{At}w_0$$

fiind, din p.d.v. al formei, o generalizare a formulei $e^{at}w_0$ ce rezolvă problema cu condiţii iniţiale $\frac{dw}{dt}=at$, $w(0)=w_0$.

Revenim la seria 9.10. Ea defineşte o funcţie, notată e^{At}, de variabilă $t\in\mathbb{R}$ cu valori în $M_n(\mathbb{R})$ (respectiv $M_n(\mathbb{C})$), dacă $A\in M_n(\mathbb{R})$ (respectiv $A\in M_n(\mathbb{C})$). Principala sa proprietate este că poate fi **derivată termen cu termen** în raport cu t şi obţinem

(9.12) $$\frac{d}{dt}e^{At}=\mathbf{0}+A+\frac{1}{2}A^2(2t)+\frac{1}{6}A^3(3t^2)+...=A(I+\frac{1}{1!}At+\frac{1}{2!}A^2t^2+...)=Ae^{At}.$$

Amplificând la dreapta, această egalitate matriceală, cu vectorul condiţie iniţială w_0 (ce nu depinde de t) rezultă

(9.13) $$\frac{d}{dt}(e^{At}w_0)=Ae^{At}w_0.$$

Totodată, făcând $t=0$ în 9.11, găsim

(9.14) $$w(0)=e^{A0}w_0=Iw_0=w_0.$$

Penultima egalitate este rezultatul înlocuirii directe, în 9.10, a lui t cu zero. 9.13 şi 9.14 arată că formula 9.11 rezolvă complet problema cu condiţii iniţiale

$$\frac{dw}{dt}=Aw,\ w(0)=w_0.$$

EXERCIŢIUL 4.9.2

a) Determinaţi matricea exponenţială e^{At} ($t\in\mathbb{R}$) pentru matricea diagonalizabilă $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. Explicaţi simetria matricei e^{At}.

b) Determinaţi matricea exponenţială e^{At} pentru $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, care nu este diagonalizabilă (cf. 8.8.2).

c) Arătaţi că valorile proprii ale matricei $Se^{At}S^{-1}$ sunt $e^{\lambda_i t}$, unde $\lambda_i\in Spec(A)$.

NOTĂ. Un algoritm general de calcul al exponenţialei e^{At} se găseşte în anexa D.

Chestiuni recapitulative

1) Determinaţi numerele complexe de modul 1 (unitare) z a.î. $|z-i|=|z+1|$.

2) Alegeţi o matrice cu numere complexe având toate valorile proprii reale.

3) Alegeţi o matrice cu numere reale a.î. pentru orice $\lambda\in\mathbb{R}: A-\lambda I$ să fie nesingulară.

4) Fie $A_1=\begin{bmatrix}a & b\\ 0 & d\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}a & 0\\ c & d\end{bmatrix}$, $A_3=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, $A_4=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}$.
Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

(i) A_1 şi A_2 au aceleaşi valori proprii.

(ii) A_3 şi A_4 au aceleaşi valori proprii.

(iii) A_1 şi A_3 au aceleaşi valori proprii.

(iv) A_1 şi A_2 sunt asemenea.

(v) A_3 şi A_4 sunt asemenea.

5) Care din următoarele afirmaţii este adevărată? În caz contrar se cer contraexemple.

(i) Dacă A şi B au acelaşi polinom caracteristic atunci ele sunt asemenea.

(ii) Dacă A şi B sunt asemenea atunci au acelaşi polinom caracteristic.
(iii) Dacă A şi B sunt hermitice atunci $A+B$ şi AB sunt hermitice.
(iv) Dacă A şi B sunt unitare atunci $A+B$ şi AB sunt unitare.

6) Arătaţi, determinând-o, că există o singură matrice cu v.p. $\lambda_1=1, \lambda_2=2$ şi v.p. corespunzători $x_1=(1,1)^T, x_2=(1,2)^T$.

7) Calculaţi elementele matricei $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^n$ ca funcţii de n.

8) Cum arată forma Jordan a unei matrice având toate valorile proprii simple? Dar a unei matrice $n \times n$ având n vectori proprii?

Capitolul 5

FORME PĂTRATICE. MATRICE DEFINITE ŞI SEMIDEFINITE

Rezumat. Metodele algebrei liniare se aplică şi unor funcţii definite pe $\mathbb{R}^n$ care nu sunt liniare: formele pătratice (f.p.). Expresia de calcul a unei asemenea funcţii depinde de reperul (i.e. baza) spaţiului $\mathbb{R}^n$ ales, exprimabilă cu ajutorul a $n \times n$ coeficienţi ce alcătuiesc o matrice simetrică de ordinul n – **matricea asociată** f.p. în baza respectivă (§1). Schimbarea de reper prin care matricea asociată unei f.p. devine diagonală se numeşte **reducere la forma canonică** a acestei f.p. Cea mai importantă reducere de acest tip se realizează prin rotirea axelor reperului pentru a le suprapune peste **axele principale** ale f.p. şi are importante aplicaţii geometrice (§2). În cursul fiecărei transformări de coordonate, matricea asociată f.p. suferă o transformare de **congruenţă**, iar aceste transformări păstrează rangul şi semnul valorilor proprii (teorema inerţiei). Reluând algoritmul Gauss din capitolul 1, într-o variantă uşor modificată, putem realiza transformări de congruenţă prin care să reducem matricea la forma diagonală, iar f.p. corespunzătoare la forma canonică (§3). Când o f.p. are originea ca punct de extremum strict, atunci ea, împreună cu matricea simetrică asociată, se numesc **definite** (§4). Când originea este un punct de extremum nestrict, ele se numesc **semidefinite** (§5). F.p. pozitiv definite permit generalizarea expresiei (3).1.1, de calcul a unui produs scalar şi generalizarea problemei VVP (§6), iar pozitiv semidefinirea oferă posibilitatea unor descompuneri – **singulară** şi **polară** – pentru orice matrice (§7).

§1. Schimbarea matricei asociate la schimbarea bazei

(1.1) DEFINIŢIE. *O **formă pătratică** în variabilele $x_1,...,x_n$ este un **polinom omogen de gradul doi** în aceste variabile. El defineşte o funcţie*

$$q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

(1.2) EXEMPLE

1) **Energia cinetică** a unei particule de masă m şi coordonate $x(t),y(t),z(t)$ are expresia $\frac{m}{2}\left((x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2\right)$ şi reprezintă o f.p. în variabilele

$$x_1=x', x_2=y', x_3=z'.$$

2) **Diferenţiala de ordinul doi** a funcţiei $f(u_1,...,u_n)$, în punctul $(u_1^0,...,u_n^0)$, în care ea există, este $d^2f(u_1^0,...,u_n^0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}du_i du_j$, unde $a_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}(u_1^0,...,u_n^0)$, deci o f.p. în variabilele $x_1=du_1,...,x_n=du_n$.

3) **Curbele** din planul coordonatelor x, y având ecuaţia $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=1$ se numesc **conice** (e.g. **elipse**, **hiperbole**, etc.).

Suprafeţele, din spaţiul $Oxyz$, cu ecuaţia

$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz=1$

se numesc **cuadrice** (e.g. **elipsoizi, hiperboloizi**, ş.a.).

(1.3) Notaţia vectorială a unei f.p. *Polinomul omogen de gradul doi în* variabilele $x_1,...,x_n$ se poate scrie sub forma unei sume duble:

$$q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \qquad (1)$$

unde, prin notaţie, vom presupune $a_{ij}=a_{ji}$. Dacă $x=(x_1,...,x_n)^T$ şi $A=[a_{ij}]$ $(A^T=A)$ acest polinom se rescrie:

$$q=x^TAx$$

şi reprezintă notaţia vectorială a f.p. (1).

Matricea simetrică A se va numi **matricea (asociată) formei pătratice q în baza canonică.**

(1.4) Legea de schimbare a matricei asociate la schimbarea bazei. Schimbând baza canonică (e_i) a lui $\mathbb{R}^n$ cu o altă bază (f_i), coordonatele vectorului x se transformă în x' după legea $x=Sx'$ unde $S=[f_1|...|f_n]$ este matricea schimbării coordonatelor la schimbarea bazei (cf.anexei A). Calculată ca funcţie de noile coordonate, f.p. va fi:

$$q=x^TAx=(Sx')^TASx'=x'^TS^TASx', \qquad (2)$$

din care extragem legea

$$\boxed{A\to S^TAS}$$

ce guvernează schimbarea matricei lui q la schimbarea de coordonate dată de matricea S.

(1.5) Forme canonice ale lui q şi reducerea la o formă canonică. Forma pătratică este o funcţie care nu depinde de reper, deci polinomul particular prin care se calculează valoarea sa într-un punct din $\mathbb{R}^n$. Când facem o schimbare de coordonate $x=Sx'$, f.p. $q(x_1,...,x_n)$ devine $q(x_1',...,x_n')$, dar, reprezentând **aceeaşi funcţie**, cele două expresii sunt egale, aşa cum o arată (2). Este evident că vom prefera expresii cât mai simple de calcul pentru q. Ele corespund acelor repere în care matricea asociată are forma canonică. Fiind simetrică, ea este diagonalizabilă (cf. teoremei spectrale) şi vom spune că f.p. q are, într-un anumit reper, forma canonică, dacă matricea lui q în acel reper este **diagonală**.

Determinarea schimbării de coordonate (de reper) care să conducă la o formă canonică pentru q, se numeşte **problema reducerii la o formă canonică a lui q**. Există mai multe metode de rezolvare a ei, mai importantă fiind cea a reducerii ortogonale.

EXERCIŢIUL 5.1

a) O funcţie liniară $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ se numeşte **formă liniară**. Arătaţi că expresia unei forme liniare în coordonatele lui x este $f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=a^Tx$, unde $a\in\mathbb{R}^n$ este fixat.

b) O funcţie $f(x,y)$, $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ care pentru fiecare $y\in\mathbb{R}^n$ fixat este o formă liniară în x şi pentru fiecare $x\in\mathbb{R}^n$ fixat este o formă liniară în y, se numeşte **formă biliniară**. Arătaţi că expresia sa în coordonatele vectorilor x şi y este:

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=x^TAy.$$

Aici $A\in M_n(\mathbb{R})$ se numeşte **matricea asociată formei biliniare** f.

Indicaţie. Alegeţi $a_{ij}=f(e_i,e_j)$.

c) Forma biliniară $f(x,y)$ este **simetrică** dacă pentru orice $x,y\in\mathbb{R}^n$: $f(x,y)=f(y,x)$. Arătaţi că acesta are loc când $A=A^T$.

d) Orice f.p. $q(x)$ este rezultatul identificării lui y cu x într-o formă biliniară simetrică: $q(x)=f(x,x)$. Arătaţi că această formă biliniară este

$$f(x,y)=\tfrac{1}{2}[q(x+y)-q(x)-q(y)]$$

(numită **forma polară** a lui q).

§2. Reducerea ortogonală a unei f.p. la axele principale şi aplicaţiile sale geometrice

Metoda reducerii ortogonale este indisolubil legată de teorema spectrală şi consecinţele ei (§(4).6) având, ca şi acestea, un pronunţat caracter geometric, pus, de altfel, în evidenţă şi de terminologie.

(2.1) TEOREMĂ. *Fie* $A=A^T\in M_n(\mathbb{R})$ *şi* $\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_n$ *valorile sale proprii, iar* $u_1,\ldots,u_n$ *versorii direcţiilor proprii (ortogonale) corespunzătoare. Atunci pentru orice* $x\in\mathbb{R}^n$:

$$x^TAx=\lambda_1(u_1^Tx)^2+\ldots+\lambda_n(u_n^Tx)^2.$$

Demonstraţie. Deoarece $A=A^T$, cf. (4).6.1, există Q ortogonală astfel încât:

$$A=Q\Lambda Q^T=[u_1|\ldots|u_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^T\\ \vdots\\ u_n^T\end{bmatrix},$$

$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ fiind valorile proprii ale matricei A, iar $u_1,\ldots,u_n$ versorii proprii corespunzători.

Înlocuim această expresie în x^TAx:

$$x^TAx=x^T[u_1|\ldots|u_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1^T\\ \vdots\\ u_n^T\end{bmatrix}x=$$

$$=x^T(\sum_{i=1}^{n}\lambda_iu_iu_i^T)x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix^Tu_iu_i^Tx=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(u_i^Tx)^2.\ \blacksquare$$

(2.2) COMENTARIU. Versorii $(u_1,\ldots,u_n)$ alcătuiesc o bază ortonormată în $\mathbb{R}^n$.

Le mai spunem de aceea şi versorii axelor de coordonate în $\mathbb{R}^n$. Fiind în acelaşi timp **direcţii proprii** (i.e. vectori proprii) ale matricei A, se vor numi **axele principale** ale f.p. $q = x^T Ax$. Proiectând x pe aceste axe obţinem:

$$x = QQ^T x = [u_1|\dots|u_n]\begin{bmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} x = (\sum_{i=1}^{n} u_i u_i^T)x = \sum_{i=1}^{n} (u_i^T x)u_i,$$

în care $u_i^T x$ este proiecţia cu semn, iar $(u_i^T x)u_i$ este proiecţia ca vector, a lui x pe axa u_i.

(2.3) EXEMPLU $q = x_1^2 - 2\sqrt{2}\,x_1x_2$.

Pentru a scrie matricea simetrică A, asociată lui q, aşezăm pe diagonală coeficienţii pătratelor, iar în poziţiile (i,j) şi (j,i) 1/2 din coeficientul termenului x_ix_j:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = -1$, a.î. forma canonică, după reducerea ortogonală, va fi $2y_1^2 - y_2^2$.

Axele principale ale lui q sunt date de vectorii proprii corespunzători acestor valori proprii şi ortonormaţi. Pentru λ_1 găsim $u_1 = \dfrac{(-\sqrt{2},1)^T}{\sqrt{3}}$, iar pentru λ_2: $u_2 = \dfrac{(1,\sqrt{2})^T}{\sqrt{3}}$.

$$Q = [u_1|u_2] = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

(2.4) OBSERVAŢIE. Pentru ca această matrice să fie una de rotaţie, deci ca $\det Q = 1$ (cf. (3).5.9), putem schimba semnul unei coloane, alegând de pildă $Q = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$. Din p.d.v. geometric aceasta înseamnă schimbarea sensului pe axa $u_1 = Oy_1$. Alegerea axelor principale ca axe de coordonate revine la rotaţia acestora cu unghiul $\measuredangle(e_1,u_1)$, ceea ce conduce la schimbarea de coordonate $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = Q\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ şi are ca efect reducerea lui q la forma canonică.

(2.5) EXEMPLU. $q = 5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$.

Matricea asociată lui q va fi

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Cf. (4).5.4.2 şi (4).6.3.2, $\lambda_1=\lambda_2=6, \lambda_3=3$, iar

$$Q=\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} (detQ=1).$$

Prin rotaţia $x=Qy$ a axelor de coordonate, acestea se vor suprapune peste axele principale, iar q va căpăta forma canonică

$$q=6y_1^2+6y_2^2+3y_3^2.$$

(2.6) Reducerea ecuaţiei conicelor şi cuadricelor (cu centru) la axele de simetrie

Fixând în plan axe ortogonale de coordonate Ox_1,Ox_2, iar în spaţiul tridimensional axe ortogonale Ox_1,Ox_2,Ox_3, mulţimea punctelor ale căror coordonate verifică ecuaţia

$$x^TAx=1 \qquad (1)$$

se numesc **conice**, respeciv **cuadrice** şi reprezintă anumite curbe (plane), respectiv suprafeţe.

(2.7) *În cazul când A este nesingulară, adică $0\notin Spec(A)$, conica sau cuadrica respectivă are originea ($x=\mathbf{0}$) ca centru de simetrie şi două, respectiv trei, axe de simetrie coincizând cu axele proprii ale formei pătratice $q=x^TAx$.*

Pentru a verifica aceste proprietăţi, determinăm matricea ortogonală Q având drept coloane versorii axelor proprii ($detQ=1$) şi prin schimbarea de coordonate $x=Qy$, reducem ecuaţia (1) la forma canonică

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2=1 \qquad (2)$$

în cazul conicelor, respectiv

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2=1 \qquad (3)$$

în cazul cuadricelor.

Să observăm că ecuaţia (2) rămâne neschimbată (invariantă) la transformările

$$(y_1,y_2)\to(-y_1,y_2),(y_1,y_2)\to(y_1,-y_2),$$

ce reprezintă **simetrii** faţă de Oy_2, respectiv Oy_1.

Similar, (3) este **invariantă la simetriile**

$$(y_1,y_2,y_3)\to(y_1,-y_2,-y_3)$$

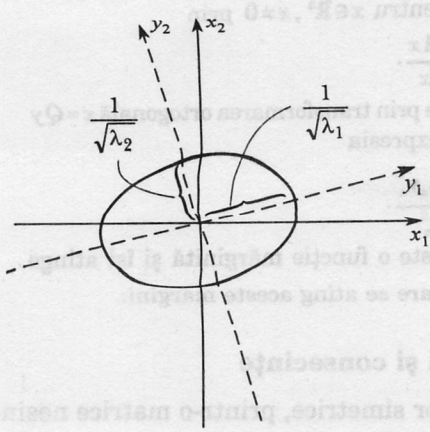
faţă de $0y_1$, etc.

În plus, când $\lambda_1,\lambda_2>0$ ecuaţia (2) reprezintă o **elipsă** de semiaxe

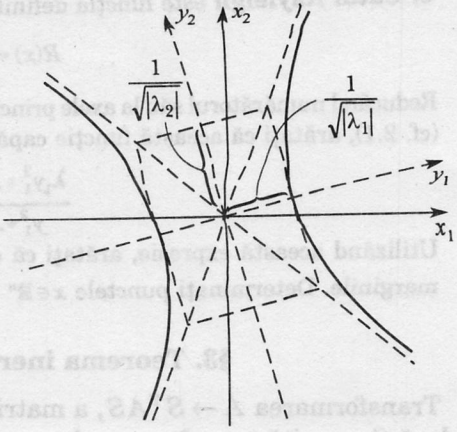
$$1/\sqrt{\lambda_1}\ ,1/\sqrt{\lambda_2}$$

(când $\lambda_1,\lambda_2<0$ elipsa este "imaginară"), iar când $\lambda_1\lambda_2<0$, reprezintă o **hiperbolă** de semiaxe

$$1/\sqrt{|\lambda_1|}\ ,1/\sqrt{|\lambda_2|}\ .$$



Elipsă



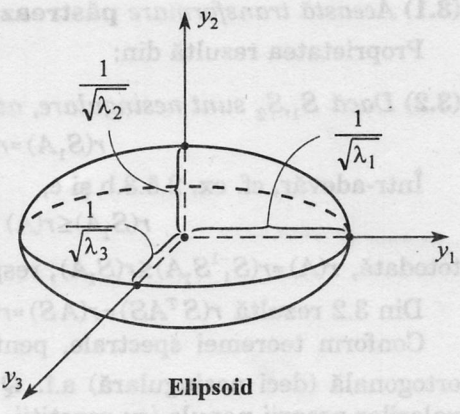
Hiperbolă

În cazul tridimensional, dacă $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3>0$, (3) reprezintă un **elipsoid** de semiaxe

$$1/\sqrt{\lambda_1}\ ,1/\sqrt{\lambda_2}\ ,1/\sqrt{\lambda_3}$$

(când $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3<0$ acesta este "imaginar"); în celelalte cazuri, (3) reprezintă un **hiperboloid** şi anume: cu o pânză când $\lambda_1\lambda_2\lambda_3<0$ şi cu două pânze când $\lambda_1\lambda_2\lambda_3>0$; semiaxele sale sunt

$$1/\sqrt{|\lambda_1|}\ ,1/\sqrt{|\lambda_2|}\ ,1/\sqrt{|\lambda_3|}\ .$$



Elipsoid

EXERCIŢIUL 5.2

a) Determinaţi,în fiecare caz,ce tip de conică reprezintă ecuaţia respectivă, care sunt versorii axelor sale de simetrie şi care sunt semiaxele:

(i) $3x_1^2+10x_1x_2+3x_2^2=1$,

(ii) $5x_1^2+4x_1x_2+8x_2^2=1$,

(iii) $24x_1x_2-29x_1^2-36x_2^2=1$,

(iv) $x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2=1$.

b) Precizaţi, în fiecare din următoarele cazuri, ce tip de cuadrică reprezintă ecuaţia respectivă, versorii axelor sale de simetrie şi semiaxele:

(i) $2x_1^2+2x_2^2-5x_3^2+2x_1x_2=1$,

(ii) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{1}{2}$,

(iii) $2x_1^2+2x_2^2-5x_3^2+2x_1x_2=-1$,

(iv) $x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3=1$.

c) Câtul Rayleigh este funcţia definită pentru $x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0$ prin

$$R(x)=\frac{x^TAx}{x^Tx}.$$

Reducând numărătorul său la axele principale prin transformarea ortogonală $x=Qy$ (cf. 2.1), arătaţi că această funcţie capătă expresia

$$\frac{\lambda_1y_1^2+\ldots+\lambda_ny_n^2}{y_1^2+\ldots+y_n^2}.$$

Utilizând această expresie, arătaţi că ea este o funcţie mărginită şi îşi atinge marginile. Determinaţi punctele $x\in\mathbb{R}^n$ în care se ating aceste margini.

§3. Teorema inerţiei şi consecinţe

Transformarea $A\to S^TAS$, a matricelor simetrice, printr-o matrice nesingulară S, numită transformare de **congruenţă**, are câteva proprietăţi remarcabile.

(3.1) *Această transformare* **păstrează rangul**, *adică* $r(S^TAS)=r(A)$.

Proprietatea rezultă din:

(3.2) *Dacă* S_1,S_2 *sunt nesingulare, atunci*

$$r(S_1A)=r(AS_2)=r(A).$$

Într-adevăr, cf. ex. 2.5.3.b şi c,

$$r(S_1A)\leq r(A) \text{ şi } r(AS_2)\leq r(A);$$

totodată, $r(A)=r(S_1^{-1}S_1A)\leq r(S_1A)$, respectiv $r(A)=r(AS_2S_2^{-1})\leq r(AS_2)$.

Din 3.2 rezultă $r(S^TAS)=r(AS)=r(A)$. ■

Conform teoremei spectrale, pentru orice matrice simetrică A există Q ortogonală (deci nesingulară) a.î. $Q^TAQ=\Lambda$, de unde $r(A)=r(\Lambda)=$ numărul valorilor proprii nenule (cu repetiţii, cele multiple) ale matricei A. Deci:

(3.3) *Transformarea de congruenţă păstrează numărul valorilor proprii nenule* = r (*rangul*) *şi pe cel al valorilor proprii nule* = n–r.

Dar ea modifică, în general, aceste valori proprii. Spre exemplu I_2 şi $5I_2$ sunt congruente, deoarece

$$5I_2=\begin{bmatrix}1&-2\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-2&1\end{bmatrix}$$

şi au valori proprii distincte!

(3.4) **TEOREMA INERŢIEI.** *Dacă* $A=A^T\in M_n(\mathbb{R})$ *şi* $S\in M_n(\mathbb{R})$ *nesingulară, atunci matricele* S^TAS *şi* A *au* ***acelaşi număr de valori proprii pozitive şi acelaşi număr de valori proprii negative.*** (V.p. multiple se consideră repetitiv).

Pentru a explica acest fenomen fundamental, în cazul când A nu are valori proprii nule (este **nesingulară**), utilizăm proprietatea fiecărei matrice nesin-

gulare S de a putea fi descompusă în produsul QR, Q ortogonală, R superior triunghiulară şi cu diagonală strict pozitivă (cf. (3).6.3).

Pentru fiecare $t\in[0,1]$ *considerăm matricea* $S(t)=QR(t)$, *unde*

$$R(t)=tI+(1-t)R.$$

Rezultă $R(t)$, $S(t)$ *şi* $A(t)=S(t)^TAS(t)$ *nesingulare* (cum?).

În plus $A(0)=S^TAS$ *şi* $A(1)=Q^TAQ$.

Coeficienţii polinomului caracteristic al matricei $A(t)$ sunt polinoame în t, iar rădăcinile sale – deci valorile proprii ale lui $A(t)$ – vor **depinde continuu** de t. În $t=1$ ele sunt v.p. ale matricei Q^TAQ, deci ale matricei A. În $t=0$ ele coincid cu v.p. ale matricei S^TAS.

Întrucât nu se anulează în $[0,1]$**, fiecare îşi păstrează semnul!** ■

OBSERVAŢIE. În cazul când A este **singulară**, fie

$$\lambda_1\geq\ldots\geq\lambda_k>0\geq\ldots\geq 0>\lambda_{l+1}\geq\ldots\geq\lambda_n$$

valorile sale proprii. Alegînd $\varepsilon=\min\{\lambda_k,|\lambda_{l+1}|\}$, pentru orice $\alpha\in(0,\varepsilon)$ valorile proprii ale lui $A+\alpha I$, i.e. $\lambda_i+\alpha$ $(i=\overline{1,n})$, vor fi **nenule**. Cf. dem. anterioare, $S^T(A+\alpha I)S$ şi $A+\alpha I$ au acelaşi număr de valori proprii pozitive, respectiv negative. **Depinzând continuu** de α, când $\alpha\to 0$ cele pozitive devin nenegative, iar cele negative devin nepozitive. Totodată S^TAS şi A au, cf. 3.3, acelaşi număr de valori proprii nenule. Deci numărul celor pozitive (negative) va fi **acelaşi** în S^TAS şi A.

(3.5) COROLAR (inerţia formelor pătratice).
Toate formele canonice ale unei f.p. q *conţin* ***acelaşi număr de coeficienţi pozitivi şi acelaşi număr de coeficienţi negativi.***

(3.6) EXEMPLU

q din 2.3 poate fi redusă (**neortogonal!**) la o formă canonică astfel

$$q=x_1^2-2\sqrt{2}x_1x_2=(x_1-\sqrt{2}x_2)^2-2x_2^2=y_1^2-y_2^2,$$

unde $y_1=x_1-\sqrt{2}x_2$, $y_2=\sqrt{2}x_2$.

Întrucât schimbarea de coordonate

$$y=Sx,\quad S=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

este nesingulară, între cele două matrice ale lui q:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}\text{ şi }D=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},$$

există relaţia $A=S^TDS$.

Deci A şi D sunt congruente.

Deoarece $A=Q\Lambda Q^T$, tot congruente vor fi A şi $\Lambda=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

Se constată direct că amândouă au câte o valoare proprie pozitivă şi câte una negativă, ceea ce confirmă teorema inerţiei.

OBSERVAŢIE. O caracteristică importantă a procesului de eliminare (Gauss) – în care matricea A se transformă, prin înmulţiri şi scăderi de linii, în matricea superior triunghiulară U, este evidenţiată în ex. 1.9.a. Anume că, atunci când A este simetrică, **transformările păstrează această simetrie.** Ea se va reflecta în simetria descompunerii

$$A=LDL^T \text{ (cf.(1).8.3).}$$

(3.7) EXEMPLU

Reluăm din §(1).8 exemplul matricei diferenţelor finite de ordinul doi.

Egalitatea $A=LDL^T$ devine atunci

$$\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 0 & -\frac{2}{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & & \\ & \frac{3}{2} & \\ & & \frac{4}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Înmulţind cu x^T şi x, găsim expresia f.p.

$$x^TAx=(x^TL)D(L^Tx)$$

şi făcând calculul parantezelor, obţinem

$$\left[x_1-\tfrac{1}{2}x_2 \quad x_2-\tfrac{2}{3}x_3 \quad x_3\right]\begin{bmatrix}2 & & \\ & \frac{3}{2} & \\ & & \frac{4}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1-\frac{1}{2}x_2\\ x_2-\frac{2}{3}x_3\\ x_3\end{bmatrix}=2(x_1-\tfrac{1}{2}x_2)^2+\tfrac{3}{2}(x_2-\tfrac{2}{3}x_3)^2+\tfrac{4}{3}x_3^2 \qquad (1)$$

(3.8) OBSERVAŢII. 1) Descompunerea $A=LDL^T$, obţinută ca rezultat al procesului de eliminare, conduce aşadar la **reducerea la o formă canonică** a f.p. x^TAx în care **coeficienţii pătratelor sunt pivoţii matricei** A.

2) Un astfel de proces de reducere se putea face şi prin **formarea succesivă de pătrate**. Astfel f.p. $2x_1^2-2x_1x_2+2x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$ din exemplul anterior se va reduce la forma canonică (1) în următoarele două etape:

(i) grupăm toţi termenii în x_1 într-o paranteză având factor comun coeficientul lui x_1^2

$$2(x_1^2-x_1x_2),$$

pe care o transformăm, prin eventuala adăugare de pătrate în x_2,x_3 etc., într-un pătrat perfect

$$2\left(x_1^2-x_1x_2+\frac{1}{4}x_2^2\right)=2\left(x_1-\frac{1}{2}x_2\right)^2.$$

(ii) Scăzând termenii adăugaţi, grupăm restul formei pătratice (în care x_1 nu mai apare) în funcţie de x_2 etc.

Continuaţi până la obţinerea expresiei (1).

(3.9) EXEMPLU (**cazul cu permutări**)

Permutarea a două linii în matricea simetrică

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},$$

o transformă în

$$A'=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ce are o descompunere LDU (§(1).9) nesimetrică. Pentru a recăpăta simetria, vom efectua în A' o permutare a coloanelor cu aceiaşi indici (prin înmulţire, la dreapta, cu matricea de permutare P^T). Obţinem

$$PAP^T=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=A'',$$

iar matricea A'' are descompunerea LDU **simetrică**

$$A''=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & \\ & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

În afara unui caz de excepţie, pe care îl analizăm în exerciţiul 5.3.b, are loc următoarea descompunere a matricelor simetrice:

(3.10) Dacă $A = A^T \in M_n(\mathbb{R})$ are rangul r, atunci există o matrice de permutare P, o matrice inferior triunghiulară 1-diagonală L şi o matrice diagonală conţinând r elemente nenule – pivoţii matricei A urmate de $n-r$ zerouri, a.î.

$$PAP^T = LDL^T \text{ (echivalent cu } A = P^TLDL^TP) \qquad (2).$$

(3.11) **COROLAR.** ***Numărul valorilor proprii pozitive*** *şi al celor* ***negative*** *(cu repetiţii, când sunt multiple), ale matricei simetrice A,* ***coincide cu numărul pivoţilor pozitivi*** *şi respectiv* ***negativi,*** *aflaţi pe diagonala matricei D din descompunerea* (2).

Deoarece, cf. (2), A şi D sunt congruente, corolarul decurge din teorema inerţiei.

(3.12) **OBSERVAŢIE** (**calculul pivoţilor** unei matrice simetrice). Primele r elemente (nenule) din D: $d_1,d_2,...,d_r$ se pot exprima cu ajutorul **minorilor directori**, $\det A_i'$, aflaţi la intersecţia primelor i linii cu primele i coloane ale matricei $A'=PAP^T$.

Notând A'_i,L_i,D_i,L_i^T submatricele corespunzătoare din cei patru factori ai relaţiei $A'=LDL^T$, rezultă $A_i'=L_iD_iL_i^T$ şi deoarece $\det L_i=\det L_i^T=1$, prin trecerea la determinanţi:

$$\det A_i'=\det L_i\times\det D_i\times\det L_i^T=\det D_i \text{ pentru } i=\overline{1,r}.$$

Adică $\det A_1'=d_1, \det A_2'=d_1d_2,..., \det A_r'=d_1d_2...d_r$ şi formulele inverse:

(3.13) $$d_1=\det A_1',d_2=\frac{\det A_2'}{\det A_1'},\ldots,d_r=\frac{\det A_r'}{\det A_{r-1}'}.$$

(3.14) EXEMPLU

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&2&2\end{bmatrix}$$

are minorii directori $\det A_1=1,\det A_2=0,\det A_3=0$, iar rangul $r=2$. Permutând liniile şi coloanele 2 şi 3, rezultă

$$A'=P_{23}AP_{23}^T=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&2\\2&2&4\end{bmatrix},\ \det A_1'=1,\det A_2'=1,\det A_3'=0$$

a.î. pivoţii matricei A vor fi $d_1=1,d_2=1$.

(3.15) OBSERVAŢIE. Pivoţii lui A obţinuţi prin formulele 3.13 nu sunt unici, ci depind de alegerea matricei de permutare din 3.10.

Unice sunt, cf. 3.10, *numărul pivoţilor pozitivi şi cel al celor negativi* (ex. 5.3.c).

EXERCIŢIUL 5.3

a) Aplicaţi procedeul formării pătratelor (cf. 3.8.2) spre a reduce la forma canonică f.p. $x_1x_2+x_2^2$. (Pentru a respecta ordinea etapelor, schimbaţi între ele variabilele x_1 şi x_2, ceea ce revine la transformarea matricei A în PAP^T).

b) Când într-o f.p. nu apare pătratul nici unei variabile, e.g. $q=2x_1x_2+2x_1x_3$, facem schimbarea de variabile $x_1=y_1-y_2,x_2=y_1+y_2,x_3=y_3$ prin care se introduc astfel de pătrate. Continuaţi procedeul descris în 3.8.2 pentru a reduce acest q la o formă canonică.

Comparaţi cu procedeul descompunerii matricei asociate $A = LDL^T$.

c) Transformând A, din 3.14, în $A'=PAP^T$, unde $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$, determinaţi pivoţii cu formulele 3.13 şi verificaţi corectitudinea afirmaţiilor făcute în 3.15.

d) Utilizând semnele pivoţilor săi, arătaţi că matricea $A=\begin{bmatrix}1&3&0\\3&8&7\\0&7&6\end{bmatrix}$ are două valori proprii pozitive şi una negativă. Determinaţi apoi prin aceeaşi metodă semnele valorilor proprii pentru $A+2I$, deducând de aici că valoarea proprie $\lambda_3<0$ a matricei A este mai mare ca -2. Procedeul continuă cu matricea $A+I$, concluzia fiind că $\lambda_3<-1$; apoi cu $A+\frac{3}{2}I$, din care rezultă $\lambda_3<-\frac{3}{2}$ etc.

Verificaţi toate aceste afirmaţii constituind baza teoretică a unei importante metode practice (Givens) utilizate în calculul valorilor proprii ale unei matrice simetrice.

§4. Matrice simetrice definite

În diferite aplicaţii, formele pătratice ce intervin au originea ($\mathbf{0}_n$) ca punct de minim sau maxim strict.

Spre exemplu, energia cinetică (cf.1.2.1) are originea-punct de minim strict; o funcţie reală f de mai multe variabile şi de două ori diferenţiabilă are un minim (maxim) într-un punct, în care diferenţiala $df=0$ (punct staţionar), dacă d^2f, calculată în acel punct, are originea ca minim (maxim) strict. sau critic

(4.1) TEOREMĂ. *Dacă* $A=A^T\in M_n(\mathbb{R})$, *atunci următoarele condiţii sunt echivalente:*

(1) *Forma pătratică* $q=x^TAx$ *are în origine un minim strict, i.e.*

$$\forall x\in\mathbb{R}^n : x\neq\mathbf{0}_n \Rightarrow x^TAx>0.$$

(2) *Valorile proprii ale matricei* A *sunt pozitive:* $\lambda_1>0,\dots,\lambda_n>0$.

(3) *Pentru toţi* $i=\overline{1,n}$ *minorii directori* $\det A_i$ (cf. 3.12) *sunt pozitivi.*

(4) A *admite descompunerea (fără permutări)* $A=LDL^T$ *cu* $d_1>0,\dots,d_n>0$.

(5) *Există o matrice nesingulară* R *(ce poate fi aleasă superior triunghiulară şi cu elemente pozitive pe diagonală) a.î.* $A=R^TR$.

(4.2) DEFINIŢIE. *În fiecare din cazurile* (1)–(5) *spunem că* A *este* ***pozitiv definită*** *şi notăm acest fapt cu:* $A>0$.

Demonstraţie: Pe schema alăturată:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \Rightarrow & 3 & \Rightarrow & 4 \\ \Updownarrow & & \nearrow & & \Downarrow \\ 2 & & & & 5 \end{array}$$

$\boxed{1 \Leftrightarrow 2}$: Fie Q a.î. $QAQ^T=\Lambda$. Transformarea $x=Qy$ reprezintă o bijecţie a lui $\mathbb{R}^n$ pe el însuşi, $Q\mathbf{0}=\mathbf{0}$. Deci, condiţia $x\neq 0_n \Rightarrow x^TAx>o$ este echivalentă condiţiei $y\neq 0_n \Rightarrow y^T\Lambda y>0$, echivalentă cu $\lambda_1>0,\dots,\lambda_n>0$.

$\boxed{1 \Rightarrow 3}$: Deoarece $\det A=\lambda_1\dots\lambda_n$ rezultă, cf. demonstraţiei anterioare, că pentru orice f.p. $q=x^TAx$ având în origine un minim strict, $\det A>0$.

(4.3) OBSERVAŢIE. Dacă funcţia $q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ are originea ca minim (strict), atunci orice **restricţie** a sa la un subspaţiu al lui $\mathbb{R}^n$ va avea de asemenea originea ca minim (strict).

Utilizând aceasta în cazul subspaţiilor $V_i=\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_{i+1}=0,\dots,x_n=0\}$ $(i=\overline{1,n-1})$ şi observând că matricea asociată lui q restricţionat la V_i este A_i (obţinută la intersecţia primelor i linii cu primele i coloane din A) rezultă, ca şi în cazul lui q, că $\det A_i>0$, pentru $i=\overline{1,n-1}$.

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$: cf. relaţiilor 3.13.

$\boxed{4 \Rightarrow 5}$: Notăm

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_1} & & \\ & \sqrt{d_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \sqrt{d_n} \end{bmatrix},$$

deci $D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} = D$. Punând $R = D^{\frac{1}{2}} L^T$, triunghiular superioară şi având elementele $\sqrt{d_i} > 0$ pe diagonală, rezultă

$$R^T R = (D^{\frac{1}{2}} L^T)^T D^{\frac{1}{2}} L^T = L D^{\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}} L^T = L D L^T = A.$$

$\boxed{5 \Rightarrow 1}$: $q = x^T A x = x^T R^T R x = (Rx)^T Rx = \|Rx\|^2 \geq 0$ şi $q = 0 \Rightarrow Rx = \mathbf{0}_n$ (cf.(3).1.1) şi $Rx = \mathbf{0}_n \Rightarrow x = \mathbf{0}_n$, deoarece R este nesingulară. ■

(4.4) EXEMPLE

1) Matricea $n \times n$ a diferenţelor finite de ordinul al doilea (§(1).7)

$$E_n = [\ldots \ -1 \ \ 2 \ \ -1 \ \ \ldots]$$

este pozitiv definită, deoarece $\det E_n = n + 1$ (cf. anexei B) pentru orice n.

2) Matricea e^{At}, unde $A = A^T \in M_n(\mathbb{R})$, definită ca sumă a seriei de matrice simetrice

$$I + \tfrac{1}{1!} At + \tfrac{1}{2!} A^2 t^2 + \ldots$$

va fi de asemenea simetrică.

În plus, cf. ex. 4.9.2.c, valorile sale proprii sunt $e^{\lambda_i t} > 0, \lambda_i \in Spec(A) \subset \mathbb{R}$, deci $e^{At} > 0$.

3) Condiţia ca funcţia $f(x_1,\ldots,x_n)$ de clasă C^2 să aibă un minim în punctul critic $x^0 = (x_1^0,\ldots,x_n^0)$, este ca matricea hessiană

$$H_n(x^0) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \right]$$

să fie pozitiv defintă.

4) Matricea $B = B^T \in M_n(\mathbb{R})$ defineşte, prin formula $\langle x, y \rangle_B = x^T B y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^n$, un produs scalar, dacă este îndeplinită condiţia: $x \neq \mathbf{0}_n \Rightarrow \langle x, x \rangle_B > 0$ (cf. (3).1.15); adică $B > 0$.

5) Dacă $a_1,\ldots,a_k \in \mathbb{R}^n$ $(k \leq n)$, atunci **matricea Gram** a acestor vectori este

$$G(a_1,\ldots,a_k) = A^T A,$$

unde $A = [a_1 | \ldots | a_k]$. Ea este pozitiv definită d.n.d. $a_1,\ldots,a_k$ sunt **liniar independenţi** $(r(A) = k)$. Într-adevăr, numai în acest caz din $Ax = \mathbf{0}_n$ rezultă $x = \mathbf{0}_k$. Întrucât $\langle x, x \rangle_{A^T A} = \langle Ax, Ax \rangle$ putem utiliza exemplul precedent.

Dacă pentru funcţia $q = x^T A x$ originea este punct de **maxim strict**, matricea simetrică A se va numi **negativ definită**, cu notaţia $A < 0$.

Teorema 4.1 poate fi reformulată, pentru acest caz, pe baza relaţiei

(4.5) *A este negativ definită d.n.d. –A este pozitiv definită.*

EXERCIŢIUL 5.4

a) Justificaţi fiecare din implicaţiile (i)–(v) utilizând câte una din condiţiile 4.1.1-4.1.5:

(i) $A>0 \Rightarrow 2A>0$; (ii) $A>0 \Rightarrow A^{-1}>0$;

(iii) $A>0, B>0 \Rightarrow A+B>0$;

(iv) $A>0, detS\neq 0 \Rightarrow S^TAS>0$;

(v) $A=A^T$, $detA\neq 0 \Rightarrow A^2>0$.

b) Explicaţi de ce elementele de pe diagonala unei matrice pozitiv definite sunt pozitive.

c) Fie $A=A^T\in M_n(\mathbb{R})$. Arătaţi că

$$Spec(A)\subset[a,b] \Leftrightarrow \forall\alpha<a : A-\alpha I>0 \,\&\, \forall\beta>b : A-\beta I<0.$$

d) Fie $A=A^T, B=B^T\in M_n(\mathbb{R})$. Arătaţi că dacă $Spec(A)\subset[a,b]$ şi $Spec(B)\subset[c,d]$ atunci

$$Spec(A+B)\subset[a+c,b+d].$$

§5. Matrice simetrice semidefinite

Forma pătratică $q=x^TAx$ are în origine un minim (nestrict) dacă pentru orice $x\in\mathbb{R}^n$:

$$x^TAx\geq 0.$$

În acest caz despre matricea simetrică A se spune că este **pozitiv semidefinită**, fapt notat $A\geq 0$. Condiţiile echivalente se obţin slăbind condiţiile 2,4 şi 5 din 4.1. Astfel

(5.1) LEMĂ. *Pentru $A=A^T\in M_n(\mathbb{R})$ sunt echivalente condiţiile:*

(1) *F.p. $q=x^TAx$ are un minim în origine,* i.e. $x^TAx\geq 0$.

(2) *Valorile proprii ale lui A sunt nenegative:* $\lambda_1\geq 0,\ldots,\lambda_n\geq 0$.

(4) *A admite descompunerea $PAP^T=LDL^T$ cu $d_1\geq 0,\ldots,d_n\geq 0$.*

(5) *Există o matrice $R\in M_{m,n}(\mathbb{R})$: $A=R^TR$.*

Am omis condiţia (3) deoarece înlocuirea ei cu: $detA_i\geq 0$, pentru $i=\overline{1,n}$, nu asigură pozitiv semidefinirea, aşa cum o arată următorul

(5.2) EXEMPLU

Pentru $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $detA_1=detA_2=0$. Totuşi $q=x^TAx=-(x_2)^2\leq 0$. Explicaţia acestui fapt o găsim în 4.3. Pentru cazul matricei A pozitiv definite a fost suficient să analizăm numai restricţiile lui q la subspaţiile V_i. Dar în cel din exemplu, restricţia lui q la subspaţiul $\{x\in\mathbb{R}^n \mid x_1=0\}$, diferit de V_1, nu mai este pozitiv semidefinită. Va trebui să completăm condiţia (3) astfel

(5.1.3) *Determinanţii minori ai matricei A obţinuţi la intersecţia oricăror linii cu coloanele de aceiaşi indici, sunt* **nenegativi**.

Matricea din exemplu, având minorul de la intersecţia liniei şi coloanei a doua, egal cu –1, nu satisface această condiţie.

(5.3) $A=A^T\in M_n(\mathbb{R})$ *este* **negativ semidefinită** (fapt notat $A\leq 0$) *d.n.d.* $-A$ *este pozitiv semidefinită* ($-A\geq 0$).

EXERCIŢIUL 5.5

a) Dacă $A\geq 0$ putem defini matricea simetrică $A^{\frac{1}{2}}$ în modul următor: dacă $A=Q\Lambda Q^T$, notând

$$\Lambda^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n}\end{bmatrix},$$

vom pune $A^{\frac{1}{2}}=Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T$.

Arătaţi că $A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}=A$ şi $A^{\frac{1}{2}}\geq 0$.

b) Formulaţi criterii corespunzătoare celor din lema 5.1, pentru ca matricea simetrică A să fie negativ semidefinită (cu atenţie la condiţia corespunzătoare lui 5.1.3, ţinând seama de regula $\det(-A)=(-1)^n\det A$, n fiind ordinul lui A).

§6. Problema VVP generalizată: $Ax=\lambda Bx$

Fie $A=A^T, B=B^T\in M_n(\mathbb{R})$ a.î. $B>0$. Să se determine λ şi $x\neq \mathbf{0}_n$ a.î. $Ax=\lambda Bx$.

În acest caz λ se va numi **valoare proprie** şi x **vector propriu** corespunzător lui λ **pentru problema VVP generalizată.**

Valorile proprii, alcătuind **spectrul problemei VVP generalizate:** $Spec(A\,|\,B)$, sunt rădăcinile **polinomului caracteristic al problemei generalizate:** $\det(A-\lambda B)$.

Proprietăţile valorilor şi vectorilor proprii ai acestei probleme sunt asemănătoare proprietăţilor (4).5.2, (4).5.3, ale problemei VVP pentru matricele hermitice.

(6.1) *Valorile proprii ale problemei VVP generalizate sunt* ***reale.***

(6.2) *Dacă* $\lambda,\mu\in Spec(A\,|\,B)$ *şi* $\lambda\neq\mu$, *atunci* $Ax=\lambda Bx$ *şi* $Ay=\mu By$ *implică* $x^TBy=0$ (spunem, în acest caz, că vectorii x şi y sunt **B-ortogonali**[1]).

Corespunzătoare teoremei spectrale este

(6.3) **TEOREMA.** *Există o matrice nesingulară* $S\in M_n(\mathbb{R})$ *a.î. prin transformarea de congruenţă*

$$X\to S^TX\,S$$

definită de S, *matricea* A *devine* ***matricea diagonală*** Λ ***a valorilor***

---

[1] Reamintim, conform 4.4.4, că formula $\langle x,y\rangle=x^TBy$ defineşte un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.

proprii ale problemei generalizate, iar B devine matricea unitate.
S este ***matricea vectorilor proprii ai problemei generalizate*** *corespunzători valorilor proprii din* Λ *şi B-ortonormaţi.*

(6.4) EXEMPLU. $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&-2&-5\\1&-5&-3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{bmatrix}$.
(Verificaţi $B>0$.) Ecuaţia caracteristică a problemei generalizate

$$\begin{vmatrix}2-2\lambda&0&1-\lambda\\0&-2-3\lambda&-5\\1-\lambda&-5&-3-2\lambda\end{vmatrix}=0$$

are rădăcinile (reale!) $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-4$.
Vectorii proprii corespunzători vor fi soluţiile sistemelor liniare:

$$(A-B)x=\mathbf{0},$$

cu soluţia $x=\alpha(1,0,0)^T+\beta(0,-1,1)^T$, respectiv

$$(A+4B)y=\mathbf{0},$$

cu soluţia $y=(-1,1,2)^T$.
Cele două soluţii sunt B-ortogonale, adică $x^TBy=0$. Aplicăm procedeul Gram-Schmidt, în raport cu p.s. $<,>_B$, pentru a **ortogonaliza** vectorii

$$a_1=(1,0,0)^T,\ a_2=(0,-1,1)^T.$$

Obţinem

$$v_1=a_1,\ v_2=a_2-\frac{a_1^TBa_2}{a_1^TBa_1}a_1=\left(-\frac{1}{2},-1,1\right)^T.$$

Normarea: $\|v_1\|_B=\sqrt{v_1^TBv_1}=\sqrt{2}$, $\|v_2\|_B=3\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\|y\|_B=3$,

$$S=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{3\sqrt{5}}&-\frac{1}{3}\\0&-\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{1}{3}\\0&\frac{2}{3\sqrt{5}}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

(6.5) **COROLAR.** *Fiind date formele pătratice* x^TAx *şi* x^TBx *astfel încât* $x^TBx>0$ *pentru* $x\neq\mathbf{0}$, *există o schimbare de coordonate* $x=Sy$ *ce le* **reduce simultan** *la formele canonice*

$$\lambda_1y_1^2+\ldots+\lambda_ny_n^2 \text{ şi respectiv } y_1^2+\ldots+y_n^2.$$

(6.6) EXEMPLU
Pentru formele pătratice :

$$q_1=2x_1^2-2x_2^2-3x_3^2+2x_1x_3-10x_2x_3 \text{ şi } q_2=2x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+2x_1x_3$$

transformarea $x=Sy$ definită de matricea S, anterior calculată, ne conduce la formele canonice $q_1=y_1^2+y_2^2-4y_3^2$ şi respectiv $q_2=y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

EXERCIŢIUL 5.6

a) Determinaţi schimbarea de coordonate $x=Sy$ ce reduce simultan la forma canonică următoarele f.p. $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2$ şi $2x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+2x_1x_2$.

b) Dacă $A=A^T\in M_n(\mathbb{R})$ şi $B>0$ funcţia $R(x)=\frac{x^TAx}{x^TBx}$ definită pentru $x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0$ se numeşte "**câtul Rayleigh generalizat**" (vezi şi ex. 5.2.c). Utilizând corolarul 6.5 şi ex. 5.2.c arătaţi că $\max\limits_{x\neq 0}\frac{x^TAx}{x^TBx}=\lambda_1$, $\min\limits_{x\neq 0}\frac{x^TAx}{x^TBx}=\lambda_n$, unde λ_1,λ_n sunt cea mai mare, respectiv cea mai mică, valoare proprie a problemei generalizate $Ax=\lambda Bx$ şi că aceste valori se ating în vectorii proprii corespunzători ai problemei generalizate.

c) Dacă matricele simetrice A şi B comută ($AB=BA$), atunci au aceiaşi vectori proprii (cf. (4).8.9).

Determinaţi transformarea ortogonală de coordonate $x=Qy$ prin care f.p. $q_1=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$ şi $q_2=2x_1x_2$ se reduc simultan la forma canonică.

§7. Descompunerea singulară

Rezultatele obţinute în acest paragraf vor fi ultilizate exclusiv în anexa C. Iată principala

(7.1) TEOREMĂ. *Dacă $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ are rangul r, atunci există*

$$Q\in M_m(\mathbb{R}),\ S\in M_n(\mathbb{R})$$

ortogonale şi $\Sigma\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ având drept prime elemente pe diagonală

$$\sigma_{11}\geq\ldots\geq\sigma_{rr}>0,$$

iar în rest zero, astfel încât:

$$A=Q\Sigma S^T. \tag{1}$$

(7.2) DEFINIŢIE. (1) se numeşte **descompunerea singulară** a matricei A, $\sigma_{11},\ldots,\sigma_{rr}$ fiind **numerele singulare** ale matricei A.

Demonstraţie: Construcţia matricelor ortogonale S şi Q precum şi demonstrarea relaţiei (1) le vom realiza în trei etape.

(I) **Construcţia lui $S\in M_n(\mathbb{R})$:**

(7.3) *Matricea $A^TA\in M_n(\mathbb{R})$ are rangul r şi este pozitiv semidefinită.*

Afirmaţia rezultă din (3).3.30 şi 5.1.5.

Cf. teoremei spectrale şi cf. 7.3

(7.4) *Există $S=[x_1|\ldots|x_n]$ ortogonală a.î.*

$$S^T A^T A S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_r & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}, \text{ unde } \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0 \tag{2}$$

(II) **Construcţia lui** $Q \in M_m(\mathbb{R})$:

(7.5) *Coloanele*

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} Ax_1, \ldots, y_r = \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} Ax_r$$

alcătuiesc un sistem ortonormat de vectori proprii pentru AA^T *corespunzător valorilor proprii*

$$\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0.$$

Demonstraţie. Din (2) rezultă, pentru $j = \overline{1,r}$

$$A^T A x_j = \lambda_j x_j \tag{3}$$

Pe de altă parte, pentru $i, j = \overline{1,r}$

$$(Ax_i)^T A x_j = x_i^T A^T A x_j \overset{(3)}{=} x_i^T \lambda_j x_j = \begin{cases} 0 & \text{pt. } i \neq j \\ \lambda_j & \text{pt. } i = j \end{cases} \tag{4}$$

ultima egalitate fiind consecinţa ortogonalităţii lui S. Deci Ax_i sunt ortogonali şi

$$\|Ax_i\| = \sqrt{\lambda_i} > 0.$$

Amplificând (3), la stînga, cu A găsim $AA^T(Ax_j) = \lambda_j Ax_j$ deci, deoarece $\|Ax_j\| \neq 0$, (λ_j, Ax_j), pt. $j = \overline{1,r}$ sunt perechi caracteristice pentru AA^T. ■

Completăm sistemul ON $y_1, \ldots, y_r$ **până la o bază ON de vectori proprii pentru** AA^T (ceea ce revine la aplicarea algoritmului (4).7.4 de triunghiularizare printr-o matrice unitară – i.e. ortogonală – a matricei simetrice AA^T, începând de la pasul $r+1$).

Întrucât singurelor valori proprii nenule $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0$ ale lui AA^T le corespund vectorii proprii $y_1, \ldots, y_r$, ceilalţi vectori proprii obţinuţi prin completare: $y_{r+1}, \ldots, y_n$, vor fi corespunzători valorii $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$. Deci

$$AA^T y_i = \lambda_i y_i = 0 y_i = \mathbf{0} \quad \text{pt. } i = \overline{r+1,m} \tag{5}$$

(7.6) Cf. alegerii coloanelor $y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}, \ldots, y_m$ matricea $Q = [y_1 | \ldots | y_m] \in M_m(\mathbb{R})$ este ortogonală. ■

Pentru a verifica relaţia $A = Q \Sigma S^T$, vom calcula elementele σ_{ij} ale matricei

$$\Sigma = Q^T A S \in M_{m,n}(\mathbb{R}).$$

Mai precis, pentru fiecare $i=\overline{1,m}$ şi $j=\overline{1,n}$ elementul aflat pe linia i şi coloana j din Q^TAS are forma $y_i^TAx_j$ (explicaţi!).

Dacă $1\le i,j\le r$, atunci va rezulta că

$$y_i^TAx_j=\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}Ax_i\right)^TAx_j\overset{(4)}{=}\begin{cases}0 & \text{pt. } i\neq j\\ \sqrt{\lambda_j} & \text{pt. } i=j\end{cases}.$$

(7.7) Aşadar $\sigma_{jj}=\sqrt{\lambda_j}>0$, pentru $j=\overline{1,r}$.

Dacă $i>r$, din $AA^Ty_i=\mathbf{0}$ (cf. (5)) rezultă $y_i^TAA^Ty_i=y_i^T\mathbf{0}=0$, deci $\|A^Ty_i\|=0$, deci $A^Ty_i=\mathbf{0}$ şi $y_i^TAx_j=0$ pentru $\forall j=\overline{1,n}$.

Dacă $j>r$, din $A^TAx_j=0x_j=\mathbf{0}$ (cf. (3)) rezultă $x_j^TA^TAx_j=0$, deci $\|Ax_j\|=0$, deci $Ax_j=\mathbf{0}$ şi $y_i^TAx_j=0$ pentru $\forall i=\overline{1,m}$.

Ceea ce probează structura "diagonală" a lui Σ şi încheie demonstraţia teoremei 7.1. ■

(7.8) COROLAR. *Dacă $A\in M_n(\mathbb{R})$, atunci există matricele $P,Q\in M_n(\mathbb{R})$, P – pozitiv semidefinită, Q ortogonală, astfel încât:*

$$A=PQ \tag{1}$$

(7.9) DEFINIŢIE. (1) *se numeşte* **descompunerea polară** *a matricei A.*

Demonstraţie. Aplicând 7.1 găsim matricele ortogonale Q_1,Q_2 şi Σ pozitiv semidefinită (şi diagonală) a.î. $A=Q_1\Sigma Q_2$, de unde

$$A=Q_1\Sigma Q_1^TQ_1Q_2.$$

Matricea $P=Q_1\Sigma Q_1^T$, având aceleaşi valori proprii ca şi Σ (cf. (4).7.2), este pozitiv semidefinită (cf. 5.1.2), iar matricea $Q=Q_1Q_2$ este (cf. (3).5.8) ortogonală. ■

(7.10) EXEMPLE

1) Fie $A\in M_n(\mathbb{R})$ nesingulară şi $A=PQ$ descompunerea sa polară (cf. 7.8).

Rezultă $A^T=Q^TP$, deci $AA^T=P^2$ şi $P=(AA^T)^{\frac{1}{2}}>0$ (cf. ex. 5.5.a).

Să arătăm că $P^{-1}A$ este ortogonală. Verificaţi următoarele egalităţi:

$$P^{-1}A(P^{-1}A)^T=P^{-1}AA^T(P^T)^{-1}=P^{-1}P^2P^{-1}=I.$$

Concluzie. *Pentru o matrice nesingulară A descompunerea sa polară PQ este* ***unică****, iar*

$$P=(AA^T)^{\frac{1}{2}}>0,\ Q=P^{-1}A.$$

2) Dacă $A=\begin{bmatrix}-1 & -7\\ 1 & 7\end{bmatrix}$, atunci $P=(AA^T)^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}5 & -5\\ -5 & 5\end{bmatrix}$ (verificaţi!).

Vom determina matricea de rotaţie

$$Q=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

astfel încât $A=PQ$. Prin calcul obţinem $\sin\theta=\frac{4}{5}, \cos\theta=\frac{3}{5}$, deci

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}.$$

Pe de altă parte, există şi o matrice de reflexie, anume

$$H=\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

a.î. $A=PH$.

Aşadar, în acest caz, matricea ortogonală din descompunerea polară a matricei A **nu este unică!**

(7.11) Observaţii finale 1) Proprietăţile de a fi matrice definită şi semidefinită se pot extinde la cazul matricelor hermitice $A=A^*\in M_n(\mathbb{C})$.

Condiţia 4.1.1, pentru o astfel de matrice, devine $\forall x\in\mathbb{C}^n, x\neq\mathbf{0}_n : x^*Ax>0$ (reamintim că x^*Ax este, cf.(4).5.1, număr real) în timp ce condiţia 4.1.2 rămâne aceeaşi etc.

Orice matrice $A\in M_n(\mathbb{C})$ admite o descompunere polară PU unde P este pozitiv semidefinită, iar U unitară.

2) Descompunerea singulară şi cea polară sunt două din mai multe tipuri de descompuneri ale matricelor $A\in M_n(\mathbb{C})$. Iată încă unul:

Descompunerea hermitică: $A=H_1+iH_2$, unde H_1, H_2 sunt matrice hermitice.

Alăturând descompunerii matricei A descompunerea lui A^*, care va fi $A^*=H_1-iH_2$ (explicaţi!), rezultă

$$H_1=\frac{1}{2}(A+A^*) \text{ şi } H_2=\frac{1}{2i}(A-A^*).$$

Aşadar orice $A\in M_n(\mathbb{C})$ admite o descompunere hermitică şi ea este **unică**.

3) **Comparaţie** între $\mathbb{C}$ şi $M_n(\mathbb{C})$.

Există similarităţi remarcabile între proprietăţile acestor două mulţimi şi pe care le sesizăm mai pregnant, aşezându-le pe două coloane:

$z\in\mathbb{C}$	$A\in M_n(\mathbb{C})$
1) z este **real** $\Leftrightarrow z=\bar{z}$	1) A este **hermitică** $\Leftrightarrow A=A^*$; (**matricele hermitice** ocupă, deci, în $M_n(\mathbb{C})$ poziţia pe care **numerele reale** o ocupă în $\mathbb{C}$);
2) z este **imaginar** $\Leftrightarrow z=-\bar{z}$	2) A este **antihermitică** $\Leftrightarrow A=-A^*$; (**matricele antihermitice** ocupă în $M_n(\mathbb{C})$ poziţia pe care **numerele imaginare** o ocupă în $\mathbb{C}$);
3) z este **unitar** (de modul 1) $\Leftrightarrow z\bar{z}=1$	3) A este **unitară** $\Leftrightarrow AA^*=I$; (**matricele unitare** ocupă în $M_n(\mathbb{C})$ poziţia **numerelor complexe unitare**).

În aceste condiţii, iată o privire comparativă asupra unor descompuneri:

1) $z=a+ib$, $a,b\in\mathbb{R}$ (**descompunerea algebrică** a numărului complex z);	1) $A=H_1+iH_2$ H_1,H_2 hermitice, (**descompunerea hermitică**);
2) $z=ru, r\geq 0, \lvert u\rvert=1$ (**descompunerea trigonometrică** sau **polară**).	2) $A=PU$, $P\geq 0, U$ unitară, (**descompunerea polară**).

EXERCIŢIUL 5.7

a) Determinaţi numerele singulare ale matricelor

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ şi } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Determinaţi descompunerea singulară a matricelor

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ şi } [3\ 4].$$

c) Arătaţi că pentru fiecare $A\in M_n(\mathbb{R})$ există Q' ortogonală şi P' pozitiv semidefinită astfel încât $A=Q'P'$. Construiţi aceste matrice în cazul când A este nesingulară.

Indicaţie: Urmăriţi exemplul 7.10.1.

Chestiuni recapitulative

1) Determinaţi axele principale ale f.p. $q=x_1x_2$. Ce curbă este reprezentată în axele ortogonale Ox_1, Ox_2 prin ecuaţia $x_1x_2=1$?

2) Există o transformare (nesingulară) de coordonate $x=Sy$ prin care f.p. precedentă să se reducă la forma canonică $y_1^2+y_2^2$? Dar la forma canonică $y_1^2-y_2^2$? Determinaţi transformarea $x=Sy$ corespunzătoare.

3) Prin formarea de pătrate perfecte,

$$q=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$

se reduce la expresia $(x_1+x_2)^2=y_1^2$, care este o formă canonică.

Precizaţi matricea S a transformării $x=Sy$ prin care se obţine această formă canonică.

4) Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată şi care falsă (în caz de falsitate, construiţi un contraexemplu)?

(i) Matricele simetrice congruente au acelaşi număr de valori proprii nule.

(ii) Matricele simetrice (de acelaşi ordin), cu acelaşi număr de valori proprii nule, sunt congruente.

(iii) Dacă matricea simetrică A este definită şi S este nesingulară atunci S^TAS este definită.

(iv) Dacă matricea A este pozitiv definită, atunci elementele sale diagonale sunt pozitive: $a_{ii}>0$.

(v) Dacă toţi $a_{ij}>0$, atunci matricea simetrică A este pozitiv definită.

5) Care dintre următoarele matrice sunt definite şi care sunt semidefinite (precizaţi dacă pozitiv sau negativ):

$$\begin{bmatrix} 2 & \\ & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

6) Precizaţi, fără a dezvolta determinantul, dacă rădăcinile ecuaţiei de gradul doi

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

sunt reale sau nu.

ANEXE

Anexa A. Matricea schimbării de coordonate

Noţiunea de **bază** a unui spaţiu vectorial şi cea de **coordonate** ale unui vector într-o bază au fost definite în §(2).3.

A.1. Definiţia şi proprietăţile matricei S

Dacă $x=(x_1,...,x_n)^T \in K^n$ ($K=\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$), atunci $x_1,...,x_n$ reprezintă coordonatele lui x în baza canonică $e_1,...,e_n$ (i.e. coloanele matricei I_n):

$$x=x_1e_1+...+x_ne_n.$$

Dacă $e_1',...,e_n' \in K^n$ reprezintă, de asemenea, o bază în K^n, iar $x_1',...,x_n'$ sunt coordonatele **aceluiaşi** x în baza (e_i'), atunci

$$x=x_1'e_1'+...+x_n'e_n'=[e_1'|...|e_n']\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots \\ x_n'\end{bmatrix}.$$

Deci relaţia între cele două coloane de coordonate ale lui x este:

$$\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix}=S\begin{bmatrix}x_1'\\ \vdots \\ x_n'\end{bmatrix}. \quad , \; S=[e_1'|...|e_n']$$

În general, dacă $\boldsymbol{B}=(v_1,..,v_n)$,$\boldsymbol{B}'=(v_1',..,v_n')$ sunt două baze ale **aceluiaşi** spaţiu vectorial, iar (x_i) respectiv (x_i') coordonatele **aceluiaşi** v în cele două baze, atunci are loc relaţia:

$$\boxed{x=Sx'}$$

unde S este **matricea ale cărei coloane reprezintă coordonatele vectorilor v_j' în baza $\boldsymbol{B}$.**

S se numeşte ***matricea schimbării coordonatelor*** x (din $\boldsymbol{B}$) în x' (din $\boldsymbol{B}'$).

EXEMPLU

Dacă $\boldsymbol{B}=(v_1,v_2,v_3)$ şi $\boldsymbol{B}'=(v_1',v_2',v_3')$, iar

$$v_1'=v_1+v_2+v_3, v_2'=2v_1-3v_2+v_3, v_3'=-5v_1+3v_2-2v_3,$$

atunci

$$S=\begin{bmatrix}1 & 2 & -5\\ 1 & -3 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}, \text{ iar } [v]_{\boldsymbol{B}}=S[v]_{\boldsymbol{B}'}.$$

($[v]_{\boldsymbol{B}}$= coloana coordonatelor lui v în baza $\boldsymbol{B}$.)

Inversând relaţiile precedente găsim

$$\begin{cases} v_1=-\frac{3}{7}v_1'-\frac{5}{7}v_2'-\frac{4}{7}v_3' \\ v_2=\frac{1}{7}v_1'-\frac{3}{7}v_2'-\frac{1}{7}v_3', \\ v_3=\frac{9}{7}v_1'+\frac{8}{7}v_2'+\frac{5}{7}v_3' \end{cases}$$

iar

$$S^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-3 & 1 & 9\\ -5 & -3 & 8\\ -4 & -1 & 5\end{bmatrix}$$

reprezintă matricea schimbării coordonatelor din $\boldsymbol{B}'$ în $\boldsymbol{B}$:

$$[v]_{\boldsymbol{B}'}=S^{-1}[v]_{\boldsymbol{B}}.$$

PROPRIETĂŢI

1) S este **nesingulară**.

2) Notând $S_{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}'}$ matricea schimbării coordonatelor din $\boldsymbol{B}$ în $\boldsymbol{B}'$:

$$S_{\boldsymbol{B}'\to\boldsymbol{B}}=S_{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}'}^{-1}.$$

3) $S_{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}'}\cdot S_{\boldsymbol{B}'\to\boldsymbol{B}''}=S_{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}''}$.

A.2. CAZUL BAZELOR ORTONORMATE

Când $\boldsymbol{B}$ şi $\boldsymbol{B}'$ sunt baze ON atunci S este **ortogonală** (cf. (3).5.5). Spre exemplu matricea care transformă baza canonică $\boldsymbol{B}=(e_1,e_2)$ a planului, rotind-o cu unghiul θ în sens direct, a.î. $\boldsymbol{B}'=((\cos\theta)e_1+(\sin\theta)e_2,(-\sin\theta)e_1+(\cos\theta)e_2)$, este matricea ortogonală

$$R_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

(cf. (2).7.5). Observăm că $\det R_\theta=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$.

În general dacă $S=S_{\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}'}$ şi $\det S>0$, spunem că cele două baze $\boldsymbol{B}$ şi $\boldsymbol{B}'$ au **aceeaşi orientare**, iar dacă $\det S<0$, cele două baze au **orientare inversă**. Rotaţia bazelor **păstrează orientarea**. Deci **matricea de rotaţie a axelor de coordonate este ortogonală, cu determinant +1.**

Spre exemplu, în $\mathbb{R}^3$, matricea care roteşte Ox şi Oy cu unghiul θ, dar lasă neschimbată axa Oz, este (ex. 2.7.2 a) matricea ortogonală:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

În general, matricea care roteşte axele Ox,Oy,Oz suprapunându-le peste Ox', Oy', Oz' este o matrice ortogonală $Q \in M_3(\mathbb{R})$ a.î. $\det Q=1$. Ea se poate descompune într-un produs de trei rotaţii succesive $R_\psi, R_\theta, R_\varphi$:

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ψ,θ,φ numindu-se **unghiurile lui Euler**.

Anexa B. Determinanţi

Fiecărei matrice $A \in M_n(K)$ ($K=\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) i se asociază un număr notat $\det A$ şi numit determinantul său. El se poate calcula prin diverse metode. Listăm în continuare principalele proprietăţi ale determinanţilor şi pe care se bazează metodele lor de calcul. Însoţindu-le de exemplificarea cazului $n=2$,

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc.,$$

oferim şi cititorului posibilitatea de a le verifica direct, în acest caz particular.

B.1. Proprietăţile determinanţilor

1) *Determinantul este o funcţie* **liniară** *de prima sa linie*:

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} \text{ şi } \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

2) *Permutând două linii, determinantul îşi schimbă semnul*:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}.$$

3) *Înmulţind o linie cu un număr şi scăzând-o din altă linie, determinantul nu se schimbă*:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c-\lambda a & d-\lambda b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

4) *Determinantul cu o linie nulă este nul*:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

5) *Determinantul unei matrice triunghiulare este produsul elementelor de pe diagonală*:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad, \quad \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = ad.$$

6) *Determinantul produsului a două matrice este produsul determinanţilor*:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix}.$$

7) *Determinantul transpusei unei matrice este egal cu determinantul matricei*:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Din aceste proprietăţi decurg următoarele

B.2. METODE DE CALCUL AL DETERMINANŢILOR

1) Utilizând descompunerea $PA=LU$ (§(1).5), pe baza proprietăţilor 6 şi 5 rezultă

$$\det A = \pm \det L \cdot \det U = \pm u_{11}u_{22}...u_{nn}.$$

Precizăm că $u_{11},...,u_{nn}$ sunt pivoţii lui A, iar semnul + sau – este semnul lui $\det P$.

EXEMPLU

Reluând exemplul (1).5.1, din descompunerea $P_{23}A=LU$ va rezulta:

$$\det A = \det P_{23} \cdot \det U = -(u_{11}u_{22}u_{33}) = -(3 \cdot 6 \cdot 5) = -90.$$

2) Considerând determinantul ca polinom într-una sau mai multe componente ale sale, căutăm factori, liniari în aceste componente, prin care se divide el.

EXEMPLU

Determinantul **Vandermonde** de ordinul 4 este:

$$V(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix}$$

Ca polinom în x_4, el se anulează pentru $x_4=x_1$. Aşadar se divide cu x_4-x_1. Similar se divide cu x_4-x_2 şi x_4-x_3 care, fiind primi între ei, rezultă

$$V=(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)V_1,$$

unde V_1 este polinomul obţinut prin împărţirea lui V la produsul celor trei paranteze.

Întrucât V este polinom de gradul trei în x_4, V_1 nu mai depinde de x_4 şi îl putem determina drept coeficient al lui x_4^3 din dezvoltarea lui V. Conform regulei lui Laplace, dezvoltând după ultima linie găsim că acest coeficient va fi

$$V_1=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}=V(x_1,x_2,x_3).$$

Astfel încât

$$V(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)V(x_1,x_2,x_3),$$

care este o **formulă de recurenţă** şi ne permite obţinerea, în trei paşi, a formulei de calcul

$$V(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_4-x_1)(x_4-x_2)\dots(x_2-x_1)=\prod_{4\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j),$$

cu generalizarea imediată:

$$V(x_1,\dots,x_n)=\prod_{n\ge i>j\ge 1}(x_i-x_j).$$

3) **Relaţiile de recurenţă** ce se pot obţine între doi sau mai mulţi determinanţi de acelaşi tip, dar de ordine diferite, permit calculul, din aproape în aproape, al acestora.

EXEMPLU:
Determinantul de ordinul n

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \dots & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 \\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & c & a \end{vmatrix}$$

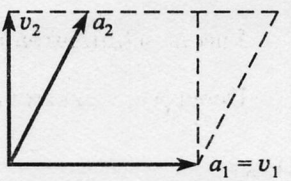
dezvoltat după prima linie, conduce la relaţia $\Delta_n=a\Delta_{n-1}-bc\Delta_{n-2}$ care este o recurenţă liniară de ordinul al doilea. Aplicând metodele din §(4).9.1, putem obţine o formulă explicită de calcul pentru Δ_n.

Spre exemplu, pentru $a=2$ şi $b=c=-1$ matricea tridiagonală este a **diferenţelor finite de ordinul al doilea** (§(1).7), iar determinantul $\Delta_n=\Delta_{n-1}+\Delta_{n-2}$. Întrucât $\Delta_1=2$, $\Delta_2=3$ obţinem $\Delta_4=5,\dots,\Delta_n=n+1$.

OBSERVAŢII: 1) Pe baza proprietăţii **B**.1.3 aplicată coloanelor matricei $A=[a_1\,|\,a_2]$ din $M_2(\mathbb{R})$, rezultă

$$\det A=\det[a_1\,|\,a_2-\lambda a_1].$$

Alegând $\lambda=a_1^Ta_2/a_1^Ta_1$, rezultă $\det A=\det[v_1\,|\,v_2]$ cu $v_1^Tv_2=0$ (cf. (3).6.1).



Aplicând **B**.1.7 şi **B**.1.6 obţinem

$$(\det A)^2=\det\left(\begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{bmatrix}[v_1\,|\,v_2]\right)=\det\begin{bmatrix} v_1^Tv_1 & 0 \\ 0 & v_2^Tv_2 \end{bmatrix}=\|v_1\|^2\|v_2\|^2=S^2$$

unde S este aria dreptunghiului (v_1,v_2), egală cu aria paralelogramului (a_1,a_2) (cf. figurii).

2) Reluând acest raţionament în cazul $A=[a_1|a_2|a_3]\in M_3(\mathbb{R})$, se arată că $(\det A)^2=V^2$, V fiind volumul paralelipipedului construit pe a_1,a_2,a_3 ca laturi.

În general despre determinantul unei matrice $A\in M_n(\mathbb{R})$ se spune că reprezintă "**volumul cu semn** (sau **orientat**)" al unui paralelipiped format din coloanele (sau liniile) matricei A.

Anexa C. Metode de calcul pentru pseudoinversa unei matrice

Vom expune două metode de calcul pentru pseudoinversa A^+ a matricei A (cf. §(3).7).

Prima şi cea mai utilizată în aplicaţii, se bazează pe descompunerea singulară a lui A (cf. (5).7.1)

$$A=Q\Sigma S^T, \tag{1}$$

unde $A,\Sigma\in M_{m,n}(\mathbb{R}), Q\in M_m(\mathbb{R}), S\in M_n(\mathbb{R})$, ultimele două ortogonale, iar

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_r & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix},$$

Σ diagonală cu elementele $\sigma_{11},\dots,\sigma_{rr}>0$, r = rangul matricei A.

(C.1) TEOREMĂ *În aceste condiţii şi notând*

$$Q^Tb=\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}, b\in\mathbb{R}^m,\ g_1\in\mathbb{R}^r,\ g_2\in\mathbb{R}^{m-r},$$

pseudosoluţia normală ((3).7.2) *a sistemului* $A\overline{x}=p=Pb$ *va fi* $\overline{x}=S\begin{bmatrix}\overline{y_1}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$

unde $\overline{y_1}=\Sigma_r^{-1}g_1$.

Demonstraţie: Deoarece $Q^T(Ax-b)=\Sigma S^Tx-Q^Tb$, iar Q păstrează lungimea ((3).5.4.4) rezultă $\|Ax-b\|=\|\Sigma S^Tx-Q^Tb\|$.

Facem schimbarea de necunoscute $y=S^Tx=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$, y_1 fiind r-dimensional.

Deoarece S păstrează lungimea:

$$\|y\|=\|x\|. \tag{2}$$

Deci

$$\|Ax-b\|^2=\|\Sigma S^Tx-Q^Tb\|^2=\left\|\begin{bmatrix}\Sigma_r y_1-g_1\\ -g_2\end{bmatrix}\right\|^2=\|\Sigma_r y_1-g_1\|^2+\|g_2\|^2.$$

Expresia din dreapta – funcţie de vectorul y_1 – îşi atinge minimul când $\|\Sigma_r y_1-g_1\|=0$, deci în $y_1=\overline{y_1}=\Sigma_r^{-1}g_1$.

Pseudosoluţiile lui $Ax=b$ (cf. §(3).4.4) vor fi aşadar

$$\bar{x}=S\begin{bmatrix}\overline{y_1}\\ y_2\end{bmatrix}, \text{ unde } y_2\in\mathbb{R}^{m-r}.$$

Cea mai scurtă dintre ele corespunde, cf. (2), celui mai scurt y, şi va fi $\begin{bmatrix}\overline{y_1}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$. Cf. (3).7.2 ea este pseudosoluţia normală. ■

(C.2) COROLAR. *Din* (1) *rezultă*

$$A^+=S\Sigma^+Q^T, \text{ unde } \Sigma^+=\begin{bmatrix}\Sigma_r^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\in M_{n,m}(\mathbb{R}).$$

Demonstraţie: Să remarcăm că pentru $b\in\mathbb{R}^m$:

$$S\Sigma^+Q^Tb=S\begin{bmatrix}\Sigma_r^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_1\\ g_2\end{bmatrix}=S^T\begin{bmatrix}\overline{y_1}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

este, cf. teoremei, pseudosoluţia normală a sistemului $Ax=b$. Atunci, cf. (3).7.3, $S\Sigma^+Q^T$ va coincide cu pseudoinversa A^+. ■

A doua metodă de calcul pentru A^+ se bazează pe descompunerea $PA=LU$ (cf. §(1).10).

Mai întâi o punem sub forma

$$A=P^TLU$$

(întrucât $P^T=P^{-1}$).

Dacă $P^TL=[l_1|\ldots|l_m]$, $U^T=[u_1|\ldots|u_m]$, atunci $A=l_1u_1^T+\ldots+l_mu_m^T$ (explicaţi!) şi întrucât $u_{r+1}=\ldots=u_m=\mathbf{0}$ (r=rang A), rezultă

$$A=\bar{L}\bar{U} \tag{3}$$

unde $\bar{L}=[l_1|\ldots|l_r]$, $\bar{U}^T=[u_1|\ldots|u_r]$.

(3) se numeşte "**descompunere după rang**" a matricei A şi s-a arătat (ex. 2.5.4 c şi d) că

$$\Im(A)=\Im(\bar{L}) \text{ şi } \Im(A^T)=\Im(\bar{U}^T) \tag{4}$$

(C.3) TEOREMĂ. *Dacă* $B=\bar{U}^T(\bar{U}\bar{U}^T)^{-1}(\bar{L}^T\bar{L})^{-1}\bar{L}^T$, *atunci pentru orice* $b\in\mathbb{R}^m$ *rezultă* $Bb\in\Im(A^T)$ *şi* $\bar{x}=Bb$ *este soluţie pentru* $A\bar{x}=p=Pb$.

Demonstraţie: Deoarece Bb are forma $\bar{U}^Ty$, rezultă că $Bb\in\Im(\bar{U}^T)=\Im(A^T)$. Calculăm

$$ABb=\bar{L}\bar{U}\bar{U}^T(\bar{U}\bar{U}^T)^{-1}(\bar{L}^T\bar{L})^{-1}\bar{L}^T=\bar{L}(\bar{L}^T\bar{L})^{-1}\bar{L}^Tb=Pb$$

unde P este, cf. (3).5.1, matricea de proiecţie pe $\Im(\bar{L})=\Im(A)$. Ceea ce încheie demonstraţia.

(C.4) COROLAR. $A^+=B$.

Demonstraţie: Cf.(3).7.1, $Bb=\overline{x_i}$ *este pseudosoluţia normală a sistemului* $A\overline{x}=b$. ■

Anexa D. O metodă de calcul a exponenţialei e^{At}

Am definit şi calculat (§(4).9.2) pentru $A\in M_n(\mathbb{R})$ diagonalizabilă, matricea exponenţială

$$e^{At}=I+\frac{1}{1!}At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\ldots,t\in\mathbb{R} \tag{1}$$

Această definiţie se extinde şi la cazul nediagonalizabil (vezi ex. 4.9.2.b), dar metodele de calcul pentru e^{At} sunt laborioase. Explicăm în continuare o astfel de metodă, ce se bazează pe următoarea:

(D.1) TEOREMĂ: *Dacă* $A\in M_n(\mathbb{R})$, *atunci există funcţiile (de t)* $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ *a.î.*

$$e^{At}=\alpha_{n-1}A^{n-1}t^{n-1}+\ldots+\alpha_1At+\alpha_0I. \tag{2}$$

În plus, dacă notăm

$$r(\lambda)=\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+\alpha_1\lambda+\alpha_0, \tag{3}$$

atunci, pentru fiecare $\mu\in Spec(At)$*:*

$$r(\mu)=e^{\mu}, \tag{4}$$

iar dacă multiplicitatea valorii proprii μ *este m>1, atunci*

$$r'(\lambda)|_{\lambda=\mu}=e^{\mu},\ldots,r^{(m-1)}(\lambda)|_{\lambda=\mu}=e^{\mu}. \blacksquare \tag{5}$$

Fără a demonstra acest rezultat, vom urmări metoda de calcul pentru e^{At} ce decurge din el. Ea conţine următoarele etape:

1) Determinăm valorile proprii λ_i ale matricei A, cele ale matricei At fiind $\mu_i=\lambda_i t$.

2) Pentru fiecare $\mu_i\in Spec(At)$, construim relaţia (4), iar dacă este multiplă şi relaţiile (5), corespunzătoare. Rezolvăm sistemul liniar $n\times n$ în necunoscutele $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}$ şi coeficienţi depinzând de t. El va fi **compatibil** şi **determinat** întrucât matricea e^{At} este **unic determinată** prin aceste relaţii.

3) Înlocuind α_i găsiţi în (2), calculăm e^{At}.

EXEMPLE

1) $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$, $\lambda_1=3,\lambda_2=1$ deci $\mu_1=3t$, $\mu_2=t$.

Întrucât (3) ne furnizează pentru $n=2$: $r(\lambda)=\alpha_1\lambda+\alpha_0$, relaţiile (4) corespunzătoare sunt:

$$\begin{cases} \alpha_1 3t + \alpha_0 = e^{3t}, \\ \alpha_1 t + \alpha_0 = e^{t}. \end{cases}$$

Sistemul are soluţia

$$\alpha_1 = \frac{1}{2t}(e^{3t} - e^{t}), \quad \alpha_0 = \frac{1}{2}(3e^{t} - e^{3t}).$$

Înlocuind A şi coeficienţii găsiţi în (2), obţinem

$$e^{At} = \alpha_1 t \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_1 t + \alpha_0 & \alpha_1 t \\ \alpha_1 t & 2\alpha_1 t + \alpha_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{3t} + e^{t} & e^{3t} - e^{t} \\ e^{3t} - e^{t} & e^{3t} + e^{t} \end{bmatrix}.$$

(Comparaţi cu rezultatul găsit în ex.4.9.2.a.)

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = -1 - i, \lambda_2 = -1 + i, \mu_1 = \lambda_1 t, \mu_2 = \lambda_2 t$.

Pentru acelaşi $r(\lambda) = \alpha_1 \lambda + \alpha_0$ scriem relaţiile (4) astfel

$$\begin{cases} \alpha_1 t(-1-i) + \alpha_0 = e^{(-1-i)t} = e^{-t}(\cos t - i \sin t) \\ \alpha_1 t(-1+i) + \alpha_0 = e^{(-1+i)t} = e^{-t}(\cos t + i \sin t) \end{cases}$$

de unde $\alpha_1 = \frac{1}{t} e^{-t} \sin t$, $\alpha_0 = e^{-t}(\cos t + \sin t)$.

În final

$$e^{At} = \alpha_1 t \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 t + \alpha_0 & -5\alpha_1 t \\ \alpha_1 t & -3\alpha_1 t + \alpha_0 \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} 2\sin t + \cos t & -5\sin t \\ \sin t & \cos t - 2\sin t \end{bmatrix}.$$

OBSERVAŢIE: Deşi λ_1, λ_2 sunt numere complexe, e^{At} $(t \in \mathbb{R})$ este o matrice reală.

3) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mu_1 = 0, \mu_2 = t$.

Aici $r(\lambda) = \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_1 \lambda + \alpha_0$, iar pentru $\lambda = \mu_1 = 0$ relaţia (4) va fi

$$\alpha_2 0^2 + \alpha_1 0 + \alpha_0 = e^0;$$

μ_1 fiind dublă şi $r'(\lambda) = 2\alpha_2 \lambda + \alpha_1$, relaţiile (5), pentru $m=2$, se reduc la

$$2\alpha_2 0 + \alpha_1 = e^0.$$

Pentru $\lambda = \mu_2 = t$, din (4):

$$\alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0 = e^t.$$

Prin calcul obţinem

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = (e^t - t - 1)/t^2$$

şi în final

$$e^{At} = \alpha_2 A^2 t^2 + \alpha_1 A t + \alpha_0 I = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ \alpha_1 t & \alpha_0 & 0 \\ \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t & 0 & \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ e^t - 1 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

Anexa E. Soluţiile exerciţilor
Capitolul 1

1.1, a) $x_4=-1/4, x_3=3/4, x_2=-1/8, x_1=3$.

b) $x_4=1, x_3=0, x_2=-1, x_1=-1$.

c) Procesul de eliminare conţine, în general, $n-1$ etape. Aici vor fi trei. Numarul pivoţilor în prima etapă este $n-1$, în a doua $n-2$,.., în a $(n-1)$-a etapă reducându-se la un pas. În total $\sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$ paşi.

1.2. a) $L=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ 3 & -4 & \frac{9}{2} & 1 \end{bmatrix}, U=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ & 1 & -5 & -7 \\ & & -6 & 3 \\ & & & \frac{51}{2} \end{bmatrix}$.

b) În urma aplicării acestor paşi sistemul capătă forma matriceală $EAx=Eb$, unde

$$E=E_{43}E_{42}E_{41}E_{32}E_{31}E_{21}.$$

c) Spre exemplu, echivalenţa $Ax = b \Leftrightarrow E_{21}Ax = E_{21}b$ se bazează pe faptul că fiecare din cele două sisteme rezultă din celălalt prin amplificarea cu o matrice şi anume E_{21}, respectiv E_{21}^{-1}.

d) Spre exemplu, prima coloană din AX va fi

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Ax.$$

1.3. a) Pentru înmulţirea unei linii cu o coloană de dimensiune n se consumă n "operaţii".

Produsul a două matrice $n \times n$ înseamnă $n \times n$ astfel de înmulţiri, deci $n \times n \times n$ "operaţii".

b) Aproximativ $\frac{n^2}{2}+\frac{n^2}{2}=n^2$ "operaţii".

c) Reluarea procesului de eliminare ar însemna consumul a $n^3/3 + n^2/2$ "operaţii" pentru determinarea lui y, ce se poate obţine cu numai n^2 "operaţii".

1.4. a) Făcând înmulţirile, găsim

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ m_{21}a_{11} & m_{21}a_{12}+a_{22}' \end{bmatrix},$$

ceea ce, în cazul matricei date, ne conduce la $a_{11}=0$ şi $m_{21}a_{11}=4$ – relaţii incompatibile!

b) (i) Scăzând cele două ecuaţii se obţine cu maşina respectivă sistemul

$$\begin{bmatrix} 1 & 10000 \\ 0 & -9990 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10000 \\ -9990 \end{bmatrix}.$$

Din a doua ecuaţie $x_2 = 1$, apoi din prima $x_1 = 0$.

(ii) Soluţia exactă este $x_1 = x_2 = 0{,}99990001$.

(iii) "Soluţia de maşină va fi $x_1 = x_2 = 1$, foarte apropiată de cea exactă.

1.5. a) $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}=P_{12}, U=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b) $P_{132}A=\begin{bmatrix} 1 & & \\ 7 & 1 & \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ & -1 & 6 \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

c) $P_{1432}A=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ -2 & 0 & 1 & \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ & 2 & 0 & 3 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{bmatrix}$.

1.6.1. a) $[A\,|\,b_1\,|\,b_2]\sim\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & -2 & 3 & -2 \end{array}\right]$ ceea ce conduce la soluţiile

$x=(15/2,-1,-3/2)^T$ şi $y=(-1,0,1)^T$.

b) Calcularea matricei A^{-1} presupune rezolvarea a n sisteme $n \times n$ cu aceeaşi matrice. Făcând eliminarea o singură dată, ca în §6.1, şi ţinând seama de forma specială a membrilor drepţi – coloanele matricei unitate I_n – numărul operaţiilor de maşină necesare vor fi (aproximativ): n^3, deci (aproximativ) de trei ori "costul" rezolvării, prin aceeaşi metodă, a sistemului $Ax = b$.

1.6.2. a) $A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

c) i) Împărţind fiecare linie din matricea $[A|I]$ cu elementul aflat pe diagonala matricei A obţinem $[I|A^{-1}]$. Deci A^{-1} va avea pe diagonală elementele $\frac{1}{a_{ii}}$ şi zero în rest.

ii) A fiind superior triunghiulară (cu 1 pe diagonală) vor fi necesare doar acele transformări ale matricei $[A|I]$ ce produc zerouri deasupra diagonalei matricei A. Ele păstrează zerourile aflate sub diagonală şi nu modifică elementele de pe diagonală, atât în A, cât şi în I.

Exemplificăm prin cazul $n = 3$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & b & 1 & & & & \\ & 1 & c & & 1 & & & \\ & & 1 & & & 1 & & \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & a & 0 & & 1 & 0 & -b & \\ & 1 & 0 & & & 1 & -c & \\ & & 1 & & & & 1 & \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & 1 & -a & ac-b & \\ & 1 & & & & 1 & -c & \\ & & 1 & & & & 1 & \end{array}\right]$$

Cazul matricelor inferior triunghiulare (cu 1 pe diagonală) este perfect analog.

1.7. Prima limită este însăşi definiţia derivatei (cf. manualului de Analiză matematică de clasa a XI-a). A doua limită se reduce la prima scriind-o sub forma

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(x-h)-u(x)}{-h}.$$

A treia se descompune în suma

$$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{u(x)-u(x-h)}{h}=\frac{1}{2}u'(x)+\frac{1}{2}u'(x).$$

În cazul ultimei limite aplicăm regula Hospital derivând numărătorul şi numitorul în raport cu h

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{u'(x+h)-u'(x-h)}{2h}$$

ceea ce, în virtutea cazului anterior, ne conduce la

$$\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{u'(x+h)-u'(x)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to}\frac{u'(x)-u'(x-h)}{h}=\frac{1}{2}u''(x)+\frac{1}{2}u''(x).$$

1.8. $A=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ & -1 & -2\\ & & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ & 1 & 2\\ & & 1\end{bmatrix}$.

1.9. a) $\begin{bmatrix}a & b & c\\ b & d & e\\ c & e & f\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & d-\frac{b^2}{a} & e-\frac{bc}{a}\\ 0 & e-\frac{bc}{a} & f-\frac{c^2}{a}\end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$.

1.10. a) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$.

b) $2b_1-3b_2+b_3=0;\ 3b_1+b_2=0,7b_1-3b_3+2b_4=0$.

c) $A_2 \sim U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 3 & -6 & 5 \\ & & 2 & -3 & 4 & -1 \\ & & & 1 & 2 & 3 \\ & & & & -8 & -5 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 3 & 1 & & & \\ -2 & 0 & 1 & & \\ 2 & -1 & 3 & 1 & \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $r=4$, $P=P_{13254}$.

d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}$, respectiv $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -\frac{7}{2} \\ & & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

Capitolul 2

2.1. a) Sunt spaţii vectoriale reale mulţimile (i), (ii), (iii), (iv), (viii), iar (vi) este spaţiu vectorial complex. Mulţimea (v) nu verifică (2), iar (vii) nu verifică (2) şi (3).

b) În mulţimea vidă au loc (2) şi (3) [ca, de altfel, orice proprietate cuantificată numai cu $\forall$].

Mulţimea (v) verifică, am văzut, (1) şi (3), nu şi (2).

Mulţimea numerelor naturale verifică (1) şi (2), nu şi (3).

c) Mulţimile (i) şi (iii) sunt spaţii vectoriale reale, (ii) şi (iv) sunt s.v. complexe, iar (v) nu este s.v.

d) (i), (ii) şi (iv) sunt s.v. peste K, dar (iii) nu este.

2.2. a) Vectorul să fie nenul.

b Dacă pentru $c_1,...,c_p \in K$, $c_1v_1+...+c_pv_p=\mathbf{0}$, atunci

$$c_1v_1+...+c_pv_p+0v_{p+1}+...+0v_n=\mathbf{0}.$$

În virtutea liniar independenţei vectorilor $v_1,..,v_p,..,v_n$ va rezulta $c_1=0,...,c_p=0$. Aşadar $v_1,...,v_p$ vor fi de asemenea liniar independenţi.

c) În (1).10.1 sistemul omogen are soluţia generală

$$x_2(2,1,0,0)^T+x_4(2,0,-2,1)^T.$$

Ea va fi nulă dacă şi componentele a II-a şi a IV-a vor fi nule, i.e. $x_2=x_4=0$, ceea ce probează liniar independenţa sistemului fundamental.

Similar se raţionează şi în cazul celorlalte sisteme fundamentale de soluţii ale sistemelor omogene.

2.3. a) Deoarece orice vector v scris ca o combinaţie liniară de $v_1,..,v_n$, se poate scrie şi ca o combiaţie liniară de $v_1,...,v_n,v_{n+1}$, răspunsul la prima întrebare este afirmativ.

Răspunsul la a doua întrebare este însă negativ. E.g. $(1,1)^T=e_1+e_2$, dar nu se poate scrie ca un multiplu de e_1 sau de e_2.

b) Baza în $M_{m,n}(K)$ va fi alcătuită din matricele I_{kl} ($k=\overline{1,m}, l=\overline{1,n}$).

c) Polinomul $p(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$ reprezintă combinaţia liniară a vectorilor (polinoame) $1, X, X^2,...,X^n$ cu scalarii $a_0, a_1, a_2,...,a_n \in K$. Prin urmare aceşti vectori reprezintă un sistem de generatori pentru $K_n[X]$.

Pe de altă parte, din condiţia ca $p(x)$ să fie polinomul (identic) nul rezultă $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$, ceea ce probează liniar independenţa aceloraşi vectori.

d) Acest fapt rezultă din liniar independenţa sistemelor $(1,X,...,X^n)$, cf. punctului c, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$.

e) Relaţia menţionată între sistemele de generatori implică, evident, incluziunea $V_1 \subset V_2$ a spaţiilor generate. Reciproc, dacă $V_1 \subset V_2$ şi $v \in S_1 \subset V_1$, rezultă că $v \in V_2$, deci se scrie ca o combinaţie liniară de vectorii lui S_2.

2.4. a) *Metodă.* Alegem un generator nenul al planului, apoi încă unul necoliniar cu primul (dacă toţi vectorii daţi ar fi nuli sau coliniari, ar genera $\{\mathbf{0}\}$, respectiv o dreaptă de vectori, contrar ipotezei).

b) Dacă $A \in M_{m,n}(K)$ şi U este o f.s. a matricei A având rangul r, deci pivoţii în liniile $\overline{1,r}$, coloanele cu pivot din U, ~~respectiv cele corespunzătoare acestora din A~~, se pot completa la o bază pentru K^n prin coloanele $e_{r+1},...,e_n$ ale matricei unitate. Explicaţi!

c) O bază în V este un sistem liniar independent format din $\dim W$ vectori. Cf. 4.5 ei formează o bază în W.

2.5.1. a) Dacă $S_1=\{v_1,...,v_k,...,v_n\}, S_2=\{v_1,..., \alpha v_k,...,v_n\}$ $(\alpha \neq 0)$, atunci $v_k=(\alpha v_k)/\alpha$, deci fiecare vector din S_1 este o combinaţie liniară de vectorii lui S_2; evident, şi reciproc. Acestea, împreună cu cele arătate în demonstraţia lemei 5.2, ne dovedesc că cele trei operaţii cu liniile matricei A, care o reduc la o f.s. canonică, nu-i modifică spaţiul liniilor.

b) Condiţia: $\exists\, x_1,...,x_m \in K$ astfel încât $y=x_1a_1^T+...+x_ma_m^T$ se scrie

$$\exists x \in K^m:\ y=A^Tx.$$

2.5.2. b) $\dim \Im(A^T)=r, \dim \mathbb{N}(A)=n-r, \dim \mathbb{R}^n=n$.

c) $Bx=\mathbf{0} \Rightarrow ABx=\mathbf{0}$. Dacă A are coloanele liniar independente atunci $Ay=\mathbf{0} \Rightarrow y=\mathbf{0}$, deci $ABx=\mathbf{0} \Rightarrow Bx=\mathbf{0}$.

2.5.3. a) Întrucât ultima linie din U este nulă, vectorii lui $\Im(U)$ vor avea zero pe ultima componentă, ceea ce nu se întâmplă cu nici una din coloanele lui A. Baza în $\Im(A)$: (a_1,a_3).

b) $y \in \Im(AB) \Leftrightarrow \exists x$ a.î. $y=ABx$.

$y \in \Im(A) \Leftrightarrow \exists x'$ a.î. $y=Ax'$.

Dacă $\exists x: y=ABx$, atunci $\exists x': y=Ax'$.

Inegalitatea rangurilor rezultă din inegalitatea dimensiunilor celor două spaţii.

Egalitatea rangurilor echivalează cu egalitatea dimensiunilor celor două spaţii deci, cf. ex. 2.4.c şi incluziunii demonstrate, cu egalitatea $\Im(AB)=\Im(A)$.

Aceasta nu se întâmplă, de exemplu, când $AB=\mathbf{0}$, dar $A \neq \mathbf{0}$.

c) Din ex. 2.5.2.c rezultă inegalitatea $n-r(B)\le n-r(AB)$, n = numărul coloanelor din B.

2.5.4. b) Baze în $\Im(A^T)$ şi $\Im(A)$ sunt date de vectorii (nenuli) v şi respectiv u.

c) Întrucât $r(\bar{L}\,\bar{U})=r(\bar{L})=r$, cf. rezolvării ex. 2.5.3.b, $\Im(\bar{L}\,\bar{U})=\Im(\bar{L})$. Cf. ex. 2.5.2.c, $\bar{L}$ având coloanele liniar independente, $\mathbb{N}(\bar{L}\,\bar{U})=\mathbb{N}(\bar{U})$.

d) Devin egalităţile $\Im(A^T)=\Im(\bar{U}^T)$ şi respectiv $\mathbb{N}(A^T)=\mathbb{N}(\bar{L}^T)$.

2.6. a) Pentru primul

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \to (a_{11},a_{12},a_{21},a_{22},a_{31},a_{32})^T,$$

pentru al doilea

$$a_3X^3+a_2X^2+a_1X+a_0 \to (a_0,a_1,a_2,a_3)^T.$$

b) Aceşti algoritmi se obţin din algoritmii referitori la spaţiul K^n (§1-§5) prin relaţia: "vectorii ... (matrice sau polinoame) au proprietatea algebrică ... d.n.d. coloanele de coordonate corespunzătoare lor (în baza canonică) au aceeaşi proprietate".

c) O bază este formată din primele şase matrice.

d) O bază este formată din

$$X^3+2X^2+X-1,\ 3X^3+X^2+X,3X^3+X+1,X^3+X+2.$$

2.7.1. a) $B=(A^TA)^{-1}A^T$ respectiv $C=A^T(AA^T)^{-1}$.

b) Din $Ax=b=Ax'$ rezultă, în primul caz, $BAx=Bb=BAx'$ adică $x=x'$.

În al doilea caz, $x=Cb$ este o soluţie.

c) În primul caz soluţia nu poate conţine parametri, deci cf. (1).10.3.2: $n-r=0$.

În al doilea caz trebuie, cf. (1).10.6, ca $K^m \subset \Im(A)$.

2.7.2. a) $(v_x,v_y,v_z)\to(\cos\theta\cdot v_x-\sin\theta\cdot v_y,\sin\theta\cdot v_x+\cos\theta\cdot v_y,v_z)$ matricea de rotaţie fiind

$$R_\theta=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Pe de o parte $f_A(x)=Ax$, pe de alta $(f_B\circ f_C)(x)=f_B(f_C(x))=B(Cx)$, pentru orice $x\in K^n$.

Deci $Ax=BCx$ pentru $x=e_1,\dots,x=e_n$, ceea ce înseamnă că cele două matrice au aceleaşi coloane, deci coincid.

c) (i) Cf. 7.4 şi 7.8: $w_j=f(v_j)=Av_j$ $(j=\overline{1,n})$. Trecând coordonatele vectorului w_j din baza canonică în baza $\boldsymbol{B}'$, rezultă $w_j=S'[w_j]_{\boldsymbol{B}'}$.

Similar obţinem relaţiile $v_j = S[v_j]_B = Se_j$. (Deoarece $v_j = 0v_1 + \ldots + 1v_j + \ldots + 0v_n$ *coordonatele lui* v_j *în baza* $\boldsymbol{B}$ *sunt* $(0,..,1,...,0)^T = e_j$).

Înlocuim în prima relaţie $S'[w_j]_{B'} = ASe_j$, *deci: coloana* j *din matricea* AS *va fi* $S'[w_j]_{B'}$, *i.e. coloana* j *din matricea* $S'A'$ *(cf. 7.8.(2) în care* A *s-a înlocuit cu* A'*). Aşadar cele două matrice,* $S'A'$ *şi* AS, *coincid.*

c) (ii) Când $n=m$ şi $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}'$ rezultă $S=S'$ a.î. relaţia devine $SA'=AS$. Ea se scrie de obicei sub forma $A'=S^{-1}AS$ sau $A=SA'S^{-1}$ şi se numeşte relaţie de **asemănare** (cf. (4).7.1).

2.8.1. b) Dacă $\alpha=0$: $a=b-c$. Deci trebuie ca $\alpha\neq 0$.

Rezolvând sistemul cu matricea $A=[a\,|\,b\,|\,c]$ şi termen liber e găsim

$$e=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)a+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)b+\frac{1}{\alpha}c,$$

deci

$$v=\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)a+\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)b=\left(1-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}-1,0\right)^T,$$

iar $w=\frac{1}{\alpha}(1,1,\alpha)^T$.

c) $y\in\Im(A+B)$ implică $y=(A+B)x=Ax+Bx\in\Im(A)+\Im(B)$.

$$dim\Im(A+B)\leq dim(\Im(A)+\Im(B))=dim\Im(A)+dim\Im(B)-$$
$$-dim\Im(A)\cap\Im(B)\leq dim\Im(A)+dim\Im(B).$$

Pentru egalitate trebuie ca $\Im(A+B)=\Im(A)+\Im(B)$ şi $\Im(A)\cap\Im(B)=\{\mathbf{0}\}$, cum este cazul când A (sau B) este matricea nulă.

2.8.2. a) Baza în sumă este a_1,a_2,b_1,b_2; $V\cap W=\{\mathbf{0}\}$; şi $x=(5,0,0,0)^T+(-4,2,3,4)^T$, descompunere unică.

b) Baza în sumă: a_1,a_2,b_1; $V\cap W=\overline{\{(2,3,1,1)^T\}}$.

2.8.3. a) Fiecare din ele este de forma $\mathbb{R}^3 = V\oplus W$, unde V este generat de fiecare din coloanele e_1, e_2, e_3, iar W este generat de celelalte două. Geometric, V reprezintă o dreaptă, iar W - un plan.

Există o singură descompunere a lui $\mathbb{R}^3$ în suma directă $V_1\oplus V_2\oplus V_3$, unde V_i este generat de e_i (i=1, 2, 3).

b) Unicitatea descompunerii rezultă din 3.4. Celelalte cazuri sunt consecinţa aceleiaşi unicităţi.

Capitolul 3

3.1 a) $\|x\|=3\sqrt{2}$, $\|y\|=6$, $\|x-y\|=3\sqrt{2}$. Aşadar este isoscel şi deoarece

$$\|x\|^2+\|x-y\|^2=\|y\|^2,$$

este şi dreptunghic: $x^T(x-y)=0$. Unghiurile interioare sunt deci

$$\sphericalangle(x,x-y)=\frac{\pi}{2},\ \sphericalangle(x,y)=\sphericalangle(y,x-y)=\frac{\pi}{4}.$$

c) Prima inegalitate este o cunoscută proprietate a modulului, a doua este inegalitatea "mediilor", i.e. $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$. Aplicându-le în cazul $u=\frac{x}{\|x\|}, v=\frac{y}{\|y\|}$ (pentru $x,y\neq\mathbf{0}$) rezultă $|<\frac{x}{\|x\|},\frac{y}{\|y\|}>| \le 1$ deci, cf. punctului precedent,

$$\frac{|<x,y>|}{\|x\|\,\|y\|} \le 1.$$

Dacă $x=\mathbf{0}$ sau $y=\mathbf{0}$, rezultă $|<x,y>| = 0 = \|x\|\,\|y\|$.

d) $\|x+y\|^2 = <x+y,x+y> = <x,x> + <x,y> + <y,x> + <y,y> = <x,x> + 2<x,y> + <y,y>$. Deci

$$\|x+y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2$$

de unde rezultă inegalitatea triunghiului.

e) Cf. 1.10 $|x^T y| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow \|y-p\| = 0$ deci, cf. 1.1, dacă $y=p$.

f) Verificăm 1.15: Din Analiza matematică ştim că $\int_a^b p^2(x)dx$, unde $p(x)$ este o funcţie continuă, este nenegativă – reprezentând o arie – şi se anulează doar dacă $a=b$ sau dacă $p(x)\equiv 0$ *pe* $[a,b]$, ceea ce nu este cazul.

3.2. a) Dacă $v_1,\dots,v_n$ generează pe V, atunci din $u^T v_i = 0$ $(i=\overline{1,n})$ rezultă

$$u^T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right) = 0$$

pentru orice $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$: deci $u\perp V$.

Generalizarea este imediată.

b) (i) Întrucât planul este $\Im(A)$, $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, iar dreapta perpendiculară pe el este $\Im(A)^\perp$, ea va coincide, cf. 2.10, cu $\mathbb{N}(A^T)$; ceea ce conduce la $v=(1,1,-2)^T$.

(ii) Planul este $\mathbb{N}(A)$ unde $A=[1,1,-2]$, dreapta perpendiculară fiind $\Im(A^T)$, adică $v=(1,1,-2)^T$.

c) Scriind $x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3, y=y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3$ din proprietăţile de distributivitate şi omogenitate rezultă

$$[x,y] = \left[\sum_{i=1}^{3} x_i e_i, \sum_{j=1}^{3} y_j e_j\right] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j [e_i,e_j].$$

Anticomutativitatea conduce la:

$$[e_i,e_i] = -[e_i,e_i] = \mathbf{0},$$

deci

$$[x,y] = (x_1y_2 - x_2y_1)[e_1,e_2] + (x_3y_1 - x_1y_3)[e_3,e_1] +$$
$$+ (x_2y_3 - x_3y_2)[e_2,e_3] = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3.$$

Condiţiile $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$ sunt echivalente condiţiilor $x_2y_3-x_3y_2=0, x_3y_1-x_1y_3=0$, $x_1y_2-x_2y_1=0$ adică $[x,y]=\mathbf{0}$.

d) Dacă $b_n=\mathbf{0}$ atunci $b=b_i\in\Im(A)$ şi cf. (1).10.6 sistemul (1) este compatibil; în acelaşi timp $A^Ty=\mathbf{0}_n\Rightarrow y\in\mathbb{N}(A^T)\Rightarrow y\perp\Im(A)\Rightarrow y\perp b_i$, ceea ce, în ipoteza $b=b_i$, contrazice $y^Tb\neq 0$.

Dacă $b_n\neq\mathbf{0}$, atunci (1) nu are soluţie, iar $y=b_n$ este soluţie pentru (2).

3.3. a) f_{A^T} transformă fiecare $y\in\mathbb{R}^m$ şi proiecţia sa y_i, pe spaţiul $\Im(A)$, în $A^Ty=A^Ty_i\in\Im(A^T)$, iar restricţia sa $h:\Im(A)\to\Im(A^T)$ este un izomorfism între cele două spaţii.

b) Dacă $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$ atunci $\Im(A^T)=\overline{\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}}$ şi $\Im(A)=\overline{\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}}$. Izomorfismul g transformă fiecare $\begin{bmatrix}\alpha\\0\end{bmatrix}$ în $A\begin{bmatrix}\alpha\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha\end{bmatrix}$. Izomorfismul h transformă orice $\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha\end{bmatrix}$ în $A^T\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\alpha\\0\end{bmatrix}$. Aşadar $g^{-1}\left(\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\alpha\\0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}2\alpha\\0\end{bmatrix}=h\left(\begin{bmatrix}\alpha\\\alpha\end{bmatrix}\right)$.

c) Nu este în contradicţie, liniar independenţa coloanelor lui A fiind o condiţie **suficientă** pentru egalitatea celor două subspaţii $\mathbb{N}(AB)$ şi $\mathbb{N}(B)$ (cf. ex. 2.5.2.c), nu şi necesară, cum o arată acest exerciţiu.

3.4. a) Întrucât $A=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ are coloanele liniar independente, se poate aplica 4.7 în cazul particular 4.3, $\overline{x}=[1\ 1]\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}/[1\ 1]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\frac{3}{2}$ (media aritmetică a celor două valori) reprezentând mijlocul segmentului $[1,2]$.

b) Pentru sistemul liniar $mx_i+n=y_i$ $(i=\overline{1,n})$, în general incompatibil, se caută în acest caz o soluţie în sensul c.m.m.p. (pseudosoluţie) $\overline{m},\overline{n}$. Aici, ea este $\overline{m}=\frac{11}{10}, \overline{n}=-\frac{2}{10}$ (cf.4.7).

c) Rescriind relaţiile

$$r_i=\frac{p}{1-e\cos\theta_i}\ (i=\overline{1,n})$$

găsim sistemul $p+er_i\cos\theta_i=r_i$ $(i=\overline{1,n})$ liniar în p şi e.

3.5.1. a) Avem $(uu^T)(uu^T)=u(u^Tu)u^T=uu^T$ deoarece $u^Tu=\|u\|^2=1$.

uu^T proiectează, cf. 5.3, pe spaţiul $\Im(uu^T)$ egal, cf. ex. 2.5.4.c, cu $\Im(u)$.

În virtutea celor discutate în §5.1, $I-uu^T$ proiectează pe

$$\Im(uu^T)^\perp=\Im(u)^\perp=\mathbb{N}(u^T).$$

b) Pentru a verifica simetria matricei P utilizaţi proprietatea (2).1.2.5; idempotenţa este consecinţa unui calcul simplu.

c) $(P_1+P_2)^2=P_1^2+P_1P_2+P_2P_1+P_2^2=P_1+P_2P_1+P_2$ şi deoarece

$$P_2P_1=P_2^TP_1^T=(P_1P_2)^T=\mathbf{0}^T=\mathbf{0}$$

rezultă că P_1+P_2 este idempotentă. Verificaţi simetria!

Dacă $y\in\Im(P_1+P_2)$, atunci există

$$x\in\mathbb{R}^n:\ y=(P_1+P_2)x=(P_1x+P_2x)\in\Im(P_1)+\Im(P_2).$$

Dacă $P_1x_1=P_2x_2$, atunci $P_1^2x_1=P_1P_2x_2=\mathbf{0}$ deci $P_1x_1=\mathbf{0}$, ceea ce arată că $\Im(P_1)\cap\Im(P_2)=\mathbf{0}$ şi suma de subspaţii este directă. (Se poate utiliza şi faptul că, în baza ipotezei $P_1^TP_2=\mathbf{0}$, i.e. coloanele matricei P_1 sunt ortogonale pe coloanele matricei P_2.)

3.5.2. a) θ va fi unghiul cu care, rotind în sens trigonometric pe v, acesta se aşează pe direcţia şi sensul lui e_1. Practic, din condiţia problemei găsim relaţiile

$$v_1\cos\theta-v_2\sin\theta=\sqrt{v_1^2+v_2^2}\ \text{ şi }\ v_1\sin\theta+v_2\cos\theta=0.$$

De unde

$$\cos\theta=\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}},\ \sin\theta=-\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}},\ \text{şi}\ R_\theta=\frac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\begin{bmatrix}v_1 & v_2\\ -v_2 & v_1\end{bmatrix}.$$

Coeficientul $\|v\|$ rezultă din proprietatea 5.4.4.

b) Iată calculul:

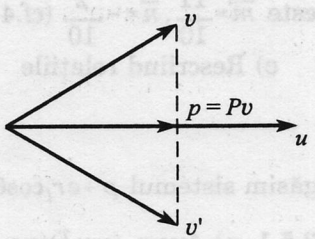
$$(I-2uu^T)v=v-2uu^Tv=\ v-(v+\|v\|e_1)\frac{2(v+\|v\|e_1)^Tv}{(v+\|v\|e_1)^T(v+\|v\|e_1)}.$$

Deoarece

$$(v+\|v\|e_1)^T(v+\|v\|e_1)=2v^Tv+2\|v\|e_1^Tv=2(v+\|v\|e_1)^Tv,$$

ultima expresie devine

$$v-(v+\|v\|e_1)=-\|v\|e_1.$$



c) Apelăm la următoarea figură. Din ea rezultă că dacă v' este simetricul lui v faţă de u, atunci

$$v+v'=2p,$$

de unde

$$v'=2p-v=(2P-I)v=-Hv.$$

d) Întrucât $v=(3,4)^T$, conform **a)**,

$$Q_1=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\ -4 & 3\end{bmatrix}.$$

Cf. **b)**, $u=vers(v+\|v\|e_1)=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T$, deci

$$Q_2 = I - 2uu^T = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3 & -4\\ -4 & 3\end{bmatrix}.$$

3.6 a) Acestea vor fi

$$A=Q_1^TR_1=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & *\\ 0 & *\end{bmatrix} \text{ şi } A=Q_2^TR_2=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3 & -4\\ -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & *\\ 0 & *\end{bmatrix}.$$

b) $P_0=1, P_1=X-\frac{<P_0,X>}{<P_0,P_0>}P_0$ şi cf. observaţiei, $<P_0,X>=0$;

$$P_2=X^2-\frac{<P_0,X^2>}{<P_0,P_0>}P_0-\frac{<P_1,X^2>}{<P_1,P_1>}P_1=X^2-\frac{1}{3},\ P_3=X^3-\frac{3}{5}X.$$

c) $c_i=\frac{<P_i,f>}{<P_i,P_i>}$.

d) $c_i=\frac{<T_i,f>}{<T_i,T_i>}$, $i=0,1,2$ şi $<T_0,T_0>=2\pi, <T_1,T_1>=\pi$

$$<T_2,T_2>=\pi,\ <T_0,f>=0,\ <T_1,f>=0,\ <T_2,f>=4.$$

Aşadar $p=\frac{4}{\pi}\sin x$.

3.7. a) Transformarea lui $b\in\mathbb{R}^m$ în proiecţia sa pe $\Im(A)$ se realizează, cf. 4.8, prin înmulţire cu $P=A(A^TA)^{-1}A^T$, fiind deci o aplicaţie liniară.

Verificăm liniaritatea transformării proiecţiei p în pseudosoluţia normală a sistemului $A\overline{x}=p$. Dacă $\overline{x}_i', \overline{x}_i''\in\Im(A^T)$ şi verifică $A\overline{x}_i'=p'$ şi $A\overline{x}_i''=p''$, atunci suma $\overline{x}=\overline{x}_i'+\overline{x}_i''\in\Im(A^T)$ şi verifică $A\overline{x}=p'+p''$, fiind deci pseudosoluţia normală a acestui sistem. Aşadar $p'+p''$ se transformă în suma pseudosoluţiilor normale corespunzătoare lui p' şi p'', ceea ce probează (2).6.1.1. Verificaţi (2).6.1.2.

b) Nucleul aplicaţiei ψ este alcătuit din acei $b\in\Im(A)$ a.î. $A\mathbf{0}_n=b$, i.e. $\mathbf{N}(\psi)=\{\mathbf{0}_m\}$.

Vom arăta că $\Im(A^T)\subset\Im(\psi)$. Fie $\overline{x}_i\in\Im(A^T)$. Luând $b=A\overline{x}_i\in\Im(A)$ rezultă $\psi(b)=\overline{x}_i$, deci $\overline{x}_i\in\Im(\psi)$.

c) Cf. def. lui ψ, pentru fiecare $b\in\Im(A)$:$\psi(b)$ este unica (cf. 7.1.1) soluţie $\overline{x}$

a sistemului $A\overline{x}=b$, care aparţine spaţiului $\Im(A^T)$.

Dacă $b=A\overline{x_i}=g(\overline{x_i})$, atunci această soluţie este chiar $\overline{x_i}$. Aşadar $\psi(g(\overline{x_i}))=\overline{x_i}$.

d) Cf. (2).7.2 : $\Im(\varphi)=\Im(A^+)$.

Pe de altă parte, aşa cum am observat, φ transformă $\mathbb{R}^m$ în $\Im(A^T)$, deci $\Im(\varphi)=\Im(A^T)$. Atunci au loc egalităţile $r(A^+)=dim\,\Im(A^+)=dim\,\Im(A^T)=r(A)$.

e) $A^+=(A^TA)^{-1}A^T$ în care înlocuind $A=QR$, după un calcul, găsim

$$A^+=R^{-1}Q^T.$$

f) Aplicând formula de la punctul **e)**:

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}^+=\frac{1}{2}[1\ 1].$$

g) Această formulă nu se poate aplica matricei [1 1], care are coloanele liniar dependente. Vom calcula pseudoinversa ei plecând direct de la definţia 7.3. Soluţia generală a sistemului liniar $x_1+x_2=b$ este $\overline{x}=(b-x_2,x_2)^T$ şi ea se descompune în

$$\frac{1}{2}(b,b)^T+\frac{1}{2}(b-2x_2,2x_2-b)^T=\overline{x_i}+\overline{x_n},$$

unde $\overline{x_i}\in\Im(A^T),\overline{x_n}\in\mathbb{N}(A)$.

Rezultă că $\varphi(b)=\frac{1}{2}(b,b)^T$, sau cf. 7.3, că $[1\ 1]^-b=\frac{1}{2}(b,b)^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}b$ pentru orice $b\in\mathbb{R}$.

Deci

$$[1\ 1]^+=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

OBSERVAŢIE. În acest caz, $(A^T)^+=(A^+)^T$. Aceasta reprezintă o proprietate generală a pseudoinversei.

Capitolul 4

4.1. b) Din $Ax=\lambda x$ rezultă $A(Ax)=\lambda Ax=\lambda(\lambda x)$ etc. Dacă pentru $x\neq\mathbf{0}$, $Ax=0x=\mathbf{0}$, atunci coloanele matricei A ar fi liniar dependente (cf. (2).2.5) şi $\det A=0$. În caz contrar, din $Ax=\lambda x$ $(\lambda\neq0)$ prin amplificare la stânga cu A^{-1} deducem $x=\lambda A^{-1}x$ sau $\lambda^{-1}x=A^{-1}x$.

c) Din $Ax=\lambda x, x\neq\mathbf{0}$ deducem $A^2x=\lambda^2x$, deci cf. ip. $A=A^2, (\lambda-\lambda^2)x=\mathbf{0}$, deci $\lambda=\lambda^2$ de unde $\lambda=0$ sau $\lambda=1$. Întrucât Ax este proiecţia lui x pe subspaţiul $\Im(A)$ (cf. (3).5.3) condiţia $Ax=x$ este echivalentă condiţiei $x\in\Im(A)$: fiecare vector nenul din $\Im(A)$ este un vector propriu pentru A corespunzător v.p. $\lambda=1$, deci o direcţie proprie.

d) Notând Q o matrice ortogonală, din $Qx=\lambda x, x\neq 0$ rezultă

$$\|Qx\|=\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|,$$

iar din $\|Qx\|=\|x\|$ ((3).5.4.4) rezultă

$$|\lambda|\|x\|=\|x\|$$

deci $|\lambda|=1$.

4.2. a) $p_T(\lambda)=(1-\lambda)^3$.

b) $p_T(\lambda)=(t_{11}-\lambda)...(t_{nn}-\lambda)$.

c) $p(\lambda)=\lambda^2-2(\cos\theta)\lambda+1$, $\lambda_{1,2}=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm i|\sin\theta|$ deci

$$|\lambda_1|=|\lambda_2|=1.$$

4.3. a) Cf. rezolvării exerciţiului 4.1.c, acest spaţiu propriu va fi $\Im(P)$, adică spaţiul pe care P proiectează vectorii lui $\mathbb{R}^n$.

b) Avem

$$\Im(P)=\overline{\left\{\left(-1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)^T,\left(\tfrac{1}{2},-1,\tfrac{1}{2}\right)^T\right\}},$$

deci un plan de vectori. P proiectează vectorii lui $\mathbb{R}^3$ pe acest plan. Atunci vectorii aşezaţi pe dreapta perpendiculară pe plan vor fi proiectaţi în $\mathbf{0}$, formând spaţiul propriu al matricei P corespunzător valorii proprii $\lambda=0$, adică $\mathbb{N}(P)$. Întrucât, $P=P^T$ el este şi $\Im(P)^\perp$.

c) Cele două soluţii w_1,w_2 ce corespund celor două perechi caracteristice ale matricei sistemului $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, sunt

$$w_1=e^{it}\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix} \text{ şi } w_2=e^{-it}\begin{bmatrix}-i\\ 1\end{bmatrix},$$

iar "soluţia generală" este $w=c_1w_1+c_2w_2$.

Din condiţiile iniţiale găsim $c_1=c_2=1/2$ a.î. soluţia cerută va fi

$$w=(-\sin t,\cos t)^T.$$

4.4. a) z se află la distanţa 1 de origine, deci pe cercul de rază 1, numit **cercul unitate** a planului complex.

(i) $z_1z_2=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)$

(ii) $z^{-1}=\dfrac{1}{z}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=\bar{z}$.

Scriind z sub forma $r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$ rezultă $z_0z=e^{i\theta_0}re^{i\theta}=re^{i(\theta_0+\theta)}$, deci z_0z are acelaşi modul ca z, iar argumentul decalat cu θ_0.

b) În cazul complex, formulele Gram-Schmidt sunt

$$v_1=a_1, v_2=a_2-\frac{v_1^*a_2}{v_1^*v_1}v_1,\ v_3=a_3-\frac{v_1^*a_3}{v_1^*v_1}v_1-\frac{v_2^*a_3}{v_2^*v_2}v_2,$$

de unde

$$v_1=(1,0,1)^T,$$

$$v_2=(i,1,1)^T-\frac{i+1}{2}(1,0,1)^T=\frac{1}{2}(i-1,2,1-i)^T,$$

$$v_3=(0,1,i)^T-\frac{i}{2}(1,0,1)^T-\frac{1+i}{4}\cdot\frac{1}{2}(i-1,2,1-i)^T=\frac{1}{4}(1-2i,3-i,2i-1)^T,$$

iar $\|v_1\|=\sqrt{2}$, $\|v_2\|=\sqrt{2}$, $\|v_3\|=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) În perfectă analogie cu $\mathbb{R}^n$ (ex. 3.5.1.a) această matrice va fi $P=uu^*$.

4.5. a) Din definiţie $a_{ij}=-\overline{a_{ji}}$, deci pentru $i=j$: $a_{ii}=-\overline{a_{ii}}$ i.e., cf. 4.1, $a_{ii}\in Im$. Dacă $A\in M_n(\mathbb{R})$ rezultă $a_{ii}=-a_{ii}$ adică $a_{ii}=0$.

b) Calculând $\overline{z}=z^*=x^*A^*x=-x^*Ax=-z$, deci $z\in Im$, iar $\lambda=\frac{x^*Ax}{x^*x}$ (x vector propriu corespunzător) implică $\lambda\in Im$.

c) Pentru acest caz, demonstraţia este la fel cu cea a proprietăţii 5.3.

4.6. a) (i) $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $\Lambda=\begin{bmatrix}3 & \\ & 1\end{bmatrix}$

(ii) $U=\begin{bmatrix}\frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$, $\Lambda=\begin{bmatrix}5 & \\ & -1\end{bmatrix}$

(iii) $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$, $\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}$

(iv) $Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $\Lambda=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1\end{bmatrix}$

b) Cf. exemplelor 6.5, din rezultatele puctului **a)** obţinem, respectiv

(i) $A=3u_1u_1^T+u_2u_2^T=3P_1+P_2$;

(ii) $A=5u_1u_1^*+(-1)u_2u_2^*=5P_1+(-1)P_2$;

(iii) $A=(u_1u_1^T+u_2u_2^T)+(-1)u_3u_3^T=P+(-1)P_3$;

(iv) $A=(u_1u_1^T+u_2u_2^T)+(-1)(u_3u_3^T+u_4u_4^T)=P+(-1)P'$.

c) Din $P^2=P$, cf. ex. 4.1.c, $Spec(P)\subset\{0,1\}$.

Deci P va avea valoarea proprie $\lambda_1=1$ cu multiplicitatea r (rangul lui P) şi v.p. $\lambda_2=0$ cu multiplicitatea $n-r$ ($r=n$ d.n.d. $P=I$). Descompunerea spectrală este: $P=\lambda_1 P+\lambda_2(I-P)$.

OBSERVAŢIE. $P+(I-P)=I$ şi $P(I-P)=\mathbf{0}$; P este matricea de proiecţie pe $\mathcal{I}(P)$ – spaţiul propriu corespunzător lui λ_1, iar $I-P$ matricea de proiecţie pe $\mathcal{N}(P)$ – spaţiul propriu corespunzător lui λ_2.

d) Singurul pas din demonstraţie ce trebuie modificat, este cel ce probează hermiticitatea (aici antihermiticitatea) matricei T: $T^*=-T$. Deci $\overline{t_{kl}}=-t_{lk}$, ceea ce arată că şi elementele aflate deasupra diagonalei matricei T sunt nule.

OBSERVAŢIE. Acest pas important, pe baza căruia deducem că matricea triunghiulară U^*AU este de fapt **diagonală**, poate fi făcut nu numai în cazul matricelor hermitice sau antihermitice, ci al tuturor acelora care au proprietatea $AA^*=A^*A$ şi care se numesc **normale**.

De exemplu, matricele unitare sunt normale, deci şi pentru ele matricea superior triunghiulară din lema lui Schur, este diagonală.

4.7. a) Amplificând prima relaţie, la stânga, cu Q^T găsim $Q^TA=R$ şi înlocuind într-a doua $A_1=Q^TAQ=Q^{-1}AQ$.

b) Cf. ipotezei $AS=SB$. Dacă $Bx=\lambda x$, atunci $SBx=\lambda Sx$, deci $Ay=\lambda y$. În plus $x\neq\mathbf{0}$ implică $y=Sx\neq\mathbf{0}$ (explicaţi!).

OBSERVAŢIE. Fiind nesingulară, S defineşte un izomorfism al spaţiului $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$) pe el însuşi (cf. (2).7.3). Acest izomorfism transformă vectorii proprii liniar independenţi ai matricei B, corespunzători lui λ, în vectori proprii liniar independenţi ai lui A, corespunzători lui λ.

În concluzie: *matricele asemenea A şi B au acelaşi număr de vectori proprii liniar independenţi pentru fiecare v.p. λ.*

c) Alegând v.p. $\lambda=i$ şi vectorul propriu corespunzător $(i,1)^T$, îl completăm cu un vector liniar independent cu el, e.g. $(1,0)^T$, ortogonalizăm, apoi normăm şi găsim

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

OBSERVAŢIE. Calculând U^*AU găsim

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix},$$

aşadar o matrice nu numai triunghiulară, ci chiar diagonală. Acest fapt se datorează antisimetriei matricei A (conform ex. 4.6.d).

4.8 a) (i) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$. Întrucât $r(A-2I)=1$ matricea nu este diagonalizabilă.

OBSERVAŢIE. În general, dacă $A=S\Lambda S^{-1}$ şi dacă $\Lambda=\lambda I$ (A are o singură valoare proprie) atunci $A=\lambda SIS^{-1}=\lambda I$. Deci matricele cu o singură v.p. – diagonalizabile, sunt cele de forma λI.

(ii) $\lambda_1=\lambda_2=0$ şi $r(A)=1$ ne arată că A este diagonalizabilă.

OBSERVAŢIE. Valorile proprii simple nu pot altera calitatea de a diagonaliza a unei matrice. De aceea pentru $\lambda_3=8$ nu mai trebuie calculat $r(A-I)$!

(iii) Este diagonalizabilă având doar valori proprii simple.

(iv) Cf. ex. 4.1.b matricea B are aceiaşi vectori proprii ca şi A, deci diagonalizează.

Mai mult, dacă S este o matrice nesingulară de acelaşi ordin, atunci

$$S^{-1}BS=S^{-1}AS+\lambda I$$

şi această matrice are forma diagonală, Jordan, triunghiulară, d.n.d. $S^{-1}AS$ are acelaşi tip de formă canonică.

b) Punând $\lambda_1=...=\lambda_{n-1}=0$, cf. 2.6 rezultă $\lambda_n=a_{11}+a_{22}+...+a_{nn}$. În consecinţă pot apărea:

CAZUL 1: $a_{11}+...+a_{nn}=0$, deci având o singură valoare proprie ($\lambda=0$) şi $n-1$ vectori proprii, matricea A nu diagonalizează (cazul $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$);

CAZUL 2: $a_{11}+...+a_{nn}=\lambda_n\neq 0$ care, fiind o valoare proprie simplă, completează la o bază primii $n-1$ vectori proprii; A diagonalizează.

c) Dacă $S^{-1}AS=\Lambda_1, S^{-1}BS=\Lambda_2$, atunci $A=S\Lambda_1S^{-1}$, $B=S\Lambda_2S^{-1}$. Întrucât $\Lambda_1\Lambda_2=\Lambda_2\Lambda_1$ rezultă $AB=S\Lambda_1\Lambda_2S^{-1}=S\Lambda_2\Lambda_1S^{-1}=BA$.

e) (i) Forma Jordan va conţine o singură celulă Jordan, de acelaşi ordin cu A şi corespunzătoare valorii proprii λ:

$$J_A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}.$$

(ii) Forma Jordan va conţine două celule având suma ordinelor 3, deci va fi:

$$J_A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}.$$

f) Pentru matricea de ordinul 4, primul caz este perfect similar:

$$J_A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}.$$

În al doilea caz pot apărea două variante: o celulă de ordinul 1, cealaltă de ordinul 3, sau ambele de ordinul 2, adică

$$J_A=\begin{bmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{bmatrix} \text{ sau } J_A=\begin{bmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{bmatrix}.$$

Pentru a stabili care din ele corespunde matricei în discuţie, sunt necesare informaţii suplimentare, ce se pot obţine prin calcul (a se vedea bibliografia).

4.9.1. a) $A=S\Lambda S^{-1}=\begin{bmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&\\&\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\lambda_2\\-1&\lambda_1\end{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}$, unde λ_1,λ_2 sunt cele două rădăcini ale ecuaţiei caracteristice $\lambda^2-\lambda-1=0$.

Pentru condiţiile iniţiale date

$$\begin{bmatrix}F_{k+1}\\F_k\end{bmatrix}=u_k=A^k u_0=S\Lambda^k S^{-1}u_0=\begin{bmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1^k&\\&\lambda_2^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}$$

de unde

$$F_k=\frac{\lambda_1^k}{\lambda_1-\lambda_2}-\frac{\lambda_2^k}{\lambda_1-\lambda_2}.$$

Întrucât $\lambda_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ este subunitară, $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_2^k=0$. Aşadar pentru valori mari ale lui k, $F_k\approx\frac{\lambda_1^k}{\lambda_1-\lambda_2}$ a.î. $\frac{F_{k+1}}{F_k}\approx\lambda_1$, la limită având loc egalitatea. (Acest număr $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}618$ reprezenta pentru artiştii Renaşterii "secţiunea de aur").

b) Facem demonstraţia în cazul: A diagonalizabilă.

Dacă $|\lambda_n|\le\ldots\le|\lambda_1|<1$, atunci $\lim\limits_{k\to\infty}|\lambda_i|^k=0$ pentru $i=\overline{1,n}$, deci cf. 9.6.

$$\lim_{k\to\infty}u_k=c_1(\lim_{k\to\infty}\lambda_1^k)x_1+\ldots+c_n(\lim_{k\to\infty}\lambda_n^k)x_n=\mathbf{0}+\ldots+\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

Reciproc, dacă pentru orice condiţii iniţiale u_0: $\lim\limits_{k\to\infty}u_k=\mathbf{0}$, atunci alegând aceste condiţii iniţiale a.î. $c_1=1$, $c_2=0$, ..., $c_n=0$, rezultă că va trebui ca $\lim\limits_{k\to\infty}u_k=(\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_1^k)x_1=\mathbf{0}$ şi deoarece $x_1\neq\mathbf{0}$ (vector propriu) rezultă $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_1^k=0$. Deci $|\lambda_1|<1$.

c) Când $A=S\Lambda S^{-1}$, $(I-A)^{-1}=S(I+\Lambda+\Lambda^2+\ldots)S^{-1}$, iar matricea diagonală $I+\Lambda+\Lambda^2+\ldots$ are pe poziţia i elementul $1+\lambda_i+\lambda_i^2+\ldots$, deci o serie convergentă exact când $|\lambda_i|<1$.

4.9.2. a) Avem $A=S\begin{bmatrix}3 & \\ & 1\end{bmatrix}S^{-1}$ unde $S=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$. Deci

$$e^{At}=Se^{\Lambda t}S^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{3t} & \\ & e^{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{3t}+e^{t} & e^{3t}-e^{t}\\ e^{3t}-e^{t} & e^{3t}+e^{t}\end{bmatrix}$$

b) Seria 9.10 se reduce, în acest caz, la $I+\frac{1}{1!}At$, deoarece $A^2=A^3=...=\mathbf{0}$ şi

$$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

GENERALIZARE. Dacă

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ & \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\in M_n,$$

atunci $A^n=A^{n+1}=...=\mathbf{0}$, iar seria 9.10 devine

$$e^{At}=I+\frac{1}{1!}At+...+\frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}t^{n-1}=\begin{bmatrix}1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\\ & \ddots & & \vdots\\ & & \ddots & \frac{t}{1!}\\ & & & 1\end{bmatrix}.$$

c) Valorile proprii ale matricei $Se^{\Lambda t}S^{-1}$ sunt, cf. 7.2, aceleaşi cu ale matricei $e^{\Lambda t}$, i.e. $e^{\lambda_i t}$ pentru $\lambda_i\in Spec(A)$.

Capitolul 5

5.1. a) Aplicând (2).7.4 pentru $m=1$ rezultă $A=[a_1...a_n]$, unde $a_i=f(e_i)$. Deci $A=a^T$ este matricea asociată formei liniare f.

b) Dacă $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i, y=\sum_{j=1}^{n}y_je_j$, cf. biliniarităţii,

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jf(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j.$$

c) f simetrică $\Rightarrow f(e_i,e_j)=f(e_j,e_i)$ $(i,j=\overline{1,n})$; deci $A=A^T$; reciproc, din simetria matricei A rezultă $f(x,y)=f(y,x)$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}^n$.

d) Simetria lui $f(x,y)$ rezultă din omogenitatea de grad doi a lui q: $q(2x)=2^2q(x)$, deci

$$f(x,x)=\frac{1}{2}[4q(x)-q(x)-q(x)]=q(x).$$

Pentru biliniaritate înlocuim $q(x)$ cu x^TAx şi rezultă

$$f(x,y)=\frac{1}{2}[(x+y)^TA(x+y)-x^TAx-y^TAy]$$

care, deoarece $x^TAy=y^TAx$ (A simetrică), conduce la x^TAy. Pentru această ultimă expresie, biliniaritatea se verifică uşor.

5.2. a) (i) Deoarece $\lambda_1\lambda_2=\det A=-16$ conica va fi o **hiperbolă**. Din $\lambda_1=8,\lambda_2=-2$ rezultă semiaxele hiperbolei $a=1/2\sqrt{2}$, $b=1/\sqrt{2}$. Pentru λ_1 versorul propriu este $u_1=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})^T$, iar pentru λ_2, $u_2=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})^T$. Deci axele de simetrie sunt bisectoarele axelor Ox_1,Ox_2.

(ii) Elipsă reală de semiaxe 1/3, 1/2, iar $u_1=(1,2)^T/\sqrt{5}$, $u_2=(-2,1)^T/\sqrt{5}$.

(iii) Elipsă imaginară.

(iv) Întrucât $\det A=0$, curba nu este conică cu centru.

b) (i) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\det A=-15<0$, deci cuadrica este un **hiperboloid cu o pânză**. Întrucât $\lambda_1=3$, $\lambda_2=1,\lambda_3=-5$ semiaxele vor fi $1/\sqrt{3}$, $1,1/\sqrt{5}$. Axele de simetrie se obţin normând cei trei vectori proprii corespunzători:

$$u_1=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)^T,\ u_2=(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)^T,u_3=(0,0,1)^T.$$

(ii) Amplificând ecuaţia cu 2 găsim v.p. $\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=1$. Din egalitatea ultimelor două deducem că, faţă de axa u_1, suprafaţa este **de rotaţie**, anume, elipsoid de rotaţie cu axa (de rotaţie) $u_1=(1,1,1)^T/\sqrt{3}$. Orice direcţie perpendiculară pe axă defineşte o axă de simetrie a suprafeţei. (Există deci, în acest caz, o infinitate de asemenea axe.)

OBSERVAŢIE. O curbă sau o suprafaţă nu se modifică dacă amplificăm ecuaţia sa cu o constantă nenulă.

(iii) Valorile proprii sunt (cf. (i)) 3, 1, –5. Deci suprafaţa este un **hiperboloid**, dar pentru a-i putea preciza numărul de pânze, trebuie adusă ecuaţia sa la forma (3). Prin amplificare cu –1 rezultă $\lambda_1=-3,\lambda_2=-1,\lambda_3=5$. Suprafaţa este un hiperboloid cu două pânze şi aceleaşi semiaxe şi axe cu cea de la punctul (i).

(iv) Întrucât $\det A=0$ suprafaţa nu este cuadrică cu centru.

c) Prin $x=Qy$ (unde $Q=[u_1|...|u_n]$ este matricea din demonstraţia teoremei 2.1) numărătorul devine

$$y^TQ^TAQy=y^T\Lambda y=\lambda_1y_1^2+...+\lambda_ny_n^2,$$

iar numitorul

$$y^TQ^TQy=y^Ty=y_1^2+...+y_n^2.$$

Dacă $\lambda_1\geq...\geq\lambda_n$, rezultă

$$\lambda_n=\frac{\lambda_ny_1^2+\ldots+\lambda_ny_n^2}{y_1^2+\ldots+y_n^2}\leq\frac{\lambda_1y_1^2+\ldots+\lambda_ny_n^2}{y_1^2+\ldots+y_n^2}\leq\frac{\lambda_1y_1^2+\ldots+\lambda_1y_n^2}{y_1^2+\ldots+y_n^2}=\lambda_1,$$

ceea ce demonstrează mărginirea.

Pentru $y=e_1$ şi $y=e_n$ câtul capătă valorile λ_1, respectiv λ_n. Corespunzător, pentru $x=Qe_1=u_1$ şi $x=Qe_n=u_n$, $R(u_1)=\lambda_1$ şi $R(u_n)=\lambda_n$.

OBSERVAŢIE. Deoarece $R(x)$ este funcţie omogenă, i.e. $R(\alpha x)=R(x)$, rezultă că orice valoare a sa se atinge într-un punct x cu $\|x\|=1$. Mulţimea acestor puncte fiind **compactă** şi $R(x)$ funcţie **continuă**, rezultatele demonstrate sunt un caz particular al unei cunoscute **teoreme a lui Weierstrass**.

5.3. a) După permutare, $q=x_1^2+x_1x_2=(x_1+\frac{x_2}{2})^2-\frac{x_2^2}{4}$.

b) Prin schimbarea de variabile propusă, forma pătratică devine

$$q = 2(y_1^2 - y_2^2) + 2y_1y_3 - 2y_2y_3 .$$

Prin procedeul 3.8.2 al formării pătratelor q va căpăta pe rând formele

$$2(y_1^2 + y_1y_3) - 2y_2^2 - 2y_2y_3 = 2\left(y_1 + \frac{y_3}{2}\right)^2 - 2y_2^2 - 2y_2y_3 - \frac{y_3^2}{2} =$$

$$= 2\left(y_1 + \frac{y_3}{2}\right)^2 - 2\left(y_2 + \frac{y_3}{2}\right)^2 .$$

Pe de altă parte, matricea ei se descompune sub forma $A = LDL^T$ astfel

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Să observăm că prin această descompunere a lui $q = y^TAy$ ajungem exact la forma în pătrate anterioară:

$$(y^TL)D(L^Ty) = \left[y_1 + \frac{y_3}{2}, y_2 + \frac{y_3}{2}, y_3\right] \begin{bmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 + \frac{y_3}{2} \\ y_2 + \frac{y_3}{2} \\ y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= 2\left(y_1 + \frac{y_3}{2}\right)^2 - 2\left(y_2 + \frac{y_3}{2}\right)^2$$

c) $\det A_1'=4, \det A_2'=4, \det A_3'=0$ deci $d_1=4, d_2=1$.

5.4. a) Pentru (i) şi (iii) condiţia 4.1.1, pentru (ii) şi (iv) condiţia 4.1.2, iar pentru (v) condiţia 4.1.5.

b) Se utilizează 4.3 pentru subspaţiile de dimensiune 1 generate de fiecare din vectorii $e_1,\ldots,e_n$. Rezultă $a_{ii}x_i^2 > 0$ pentru orice $x_i \neq 0$, deci $a_{ii} > 0$.

c) Fie $\lambda \in Spec(A)$, deci $\lambda-\alpha \in Spec(A-\alpha I)$. Condiţia $\forall \alpha<a : \lambda-\alpha>0$ este echivalentă cu $\lambda \geq a$. Aşadar $Spec(A) \subset [a,\infty)$. Similar, din a doua condiţie rezultă $Spec(A) \subset (-\infty,b]$. De unde $Spec(A) \subset [a,b]$.

d) Utilizând punctul precedent, din ipoteze rezultă

$$\forall \alpha<a, \forall \beta<c: A-\alpha I>0, B-\beta I>0,$$

deci, cf. (iii), $A+B-(\alpha+\beta)I>0$.

Prin urmare $\forall \gamma<a+c: A+B-\gamma I>0$ şi cf. punctului precedent,

$$Spec(A+B) \subset [a,\infty), \text{ ş.a.m.d.}$$

5.5. a) Deoarece $\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}} = \Lambda$, rezultă

$$A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} = Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^TQ\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T = Q\Lambda^{\frac{1}{2}}I\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T = Q\Lambda Q^T = A.$$

Valorile proprii ale matricei $A^{\frac{1}{2}}$ vor fi aceleaşi cu ale matricei $\Lambda^{\frac{1}{2}}$, adică $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n} \geq 0$. De unde, cf. 5.1.2, rezultă $A^{\frac{1}{2}} \geq 0$.

b) Pentru condiţiile 5.1.1, 5.1.2 şi 5.1.4 se inversează sensul inegalităţilor. Condiţia 5.1.5 devine: $A=-R^TR$ cu $R \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, iar 5.1.3 devine: "toţi minorii de ordin par (impar) ai matricei A, aflaţi la intersecţia unor linii cu coloanele corespunzătoare, sunt nepozitivi (respectiv nenegativi)".

5.6. a) Matricele asociate celor două f.p. fiind

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ şi } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

se constată că prima este pozitiv definită, a.î. le notăm cu B şi respectiv A. Ecuaţia caracteristică a problemei $Ax=\lambda Bx$ este

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1-\lambda \\ 1-\lambda & \frac{1}{2}-2\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

cu rădăcinile $\lambda_1=\frac{5}{2}, \lambda_2=0$.

Vectorii proprii corespunzători sunt

$$(-3,1)^T \text{ şi } (-1,2)^T.$$

Verificaţi B-ortogonalitatea!

Prin B-normare rezultă

$$S=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

iar formele canonice obţinute prin transformarea $x=Sy$ sunt respectiv

$$y_1^2+y_2^2 \text{ şi } (5/2)y_1^2.$$

b) Este suficient să alegem $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ valorile proprii, iar S matricea vectorilor proprii B-ortonormaţi ai problemei $Ax=\lambda Bx$, pentru ca schimbarea de coordonate $y=Sx$ să reducă funcţia $R(x)$ la funcţia

$$R(y)=\frac{\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_n y_n^2}{y_1^2+\ldots+y_n^2}.$$

Deci, cf rezolvării ex. 5.2.c,

$$\max_{x\neq 0}\frac{x^TAx}{x^TBx}=\max_{y\neq 0}\frac{y^T\Lambda y}{y^Ty}=\lambda_1,$$

$$\min_{x\neq 0}\frac{x^TAx}{x^TBx}=\min_{y\neq 0}\frac{y^T\Lambda y}{y^Ty}=\lambda_n,$$

valori atinse în $y=e_1$ şi $y=e_n$, respectiv $x=x_1$ şi $x=x_n$ (prima şi ultima coloană din S).

c) Întrucât matricele

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},A_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

asociate celor două f.p. comută, cf. (4).8.9 rezultă că au aceiaşi vectori proprii. Prin calcul $Spec(A_1)=\{2,0\}$, $Spec(A_2)=\{1,-1\}$, iar v.p. corespunzători sunt $(1,1)^T,(-1,1)^T$.

Normându-i, găsim matricea ortogonală cautată

$$Q=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Formele canonice corespuzătoare vor fi $q_1=2y_1^2$ şi respectiv $q_2=y_1^2-y_2^2$.

5.7 a) $\sigma_{11}=2,\sigma_{22}=1$ şi $\sigma_{11}=2,\sigma_{22}=0$.

b) $A=Q\Sigma S^T$, unde

$$Q=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & -3\end{bmatrix},\Sigma=\begin{bmatrix}5\\ 0\end{bmatrix},S^T=[1]$$

şi respectiv $A^T=S\Sigma Q^T$.

c) Plecăm de la descompunerea singulară $A=Q\Sigma S^T=QS^TS\Sigma S^T$ şi alegem $Q'=QS^T$ respectiv $P'=S\Sigma S^T\geq 0$ (deoarece $\Sigma\geq 0$). În cazul nesingular se găseşte

$$P'=(A^TA)^{\frac{1}{2}} \text{ şi } Q'=AP'^{-1}.$$

INDEX DE SUBIECTE

Algoritmul QR 86
Alternativa Fredholm 57
Anticomutativitate 57
Aproximarea cu polinoame a funcţiilor 68
Axele principale ale unei forme pătratice 99

Baza canonică 32
Bază ortonormată (ON) 65

Câtul Rayleigh 102
Câtul Rayleigh generalizat 112
Celule Jordan 89
Coloana de coordonate a unui vector 31
Complement ortogonal al unui subspaţiu 55
Conice 100
Conjugatul unui număr complex 78
Coordonatele unui vector într-o bază 31
Cuadrice 100

Descompunerea $\bar{L}\bar{U}$ a unei matrice 39, 124
Descompunerea hermitică a unei matrice 115
Descompunerea polară a unei matrice 114
Descompunerea singulară a unei matrice 112
Descompunerea spectrală a unei matrice 83
Determinantul Vandermonde 120
Diferenţiala de ordinul doi 96
Direcţii proprii (ale unei transformări) 74

Ecuaţie cu diferenţe finite 90
Ecuaţii normale 60
Elipsa 100
Elipsoid 101
Extindere (în complex) a unei noţiuni sau proprietăţi 78, 79
Extrem condiţionat (cu legături) 73

Formă biliniară 98
Formă în scară (f.s.) a unei matrice 23
Formă Jordan a unei matrice 89
Formă liniară 97
Forma canonică a unei forme pătratice 97
Forma polară a unei forme pătratice 98
Funcţia lui Lagrange 73

Hiperbola 100
Hiperboloid 101

Imaginea unei aplicaţii (liniare) 40
Inegalitatea lui Schwarz 52
Inerţia formelor pătratice 103
Injectivitatea unei aplicaţii (liniare) 40
Inversa la dreapta a unei matrice 42
Inversa la stânga a unei matrice 42
Izomorfism de spaţii vectoriale 40
Izomorfismul definit de o matrice 42, 52

Legea de schimbare a matricei asociate unei f.p. la schimbarea bazei 97
Legea de schimbare a matricei unei aplicaţii liniare la schimbarea bazei 44
Legea modulară 47
Lema lui Schur 81

Matrice antihermitică 81
Matrice antisimetrică 81
Matrice Jordan 89
Matrice în scară 20
Matrice de proiecţie în complex 79
Matrice de rotaţie a axelor de coordonate 119
Matrice hermitică (simetrică în complex) 79
Matrice negativ definită 109
Matrice negativ semidefinită 110
Matrice pozitiv definită 107
Matrice pozitiv semidefinită 109
Matrice unitară 79

Matricea (asociată) formei pătratice 97
Matricea asociată unei forme biliniare 98
Matricea Gram 108
Matricea hessiană 108
Matrice (unitar) asemenea 84
Matrice comutabile 88
Matrice de reflexie 64
Matrice normale 141
Metoda Givens 106
Minori directori 105

Numerele singulare (ale unei matrice) 112

Perechi caracteristice 74
Pivot al unei matrice în scară 20
Pivoţii unei matrice simetrice 105
Polinoame trigonometrice (Fourier) 68
Polinoame Legendre 67
Problema cu condiţii iniţiale 72, 96 şi urm.
Produs vectorial 57
Produsul scalar complex 78
Proiecţia ca vector 52
Proiecţia cu semn 52
Proiecţia paralelă cu un subspaţiu 46
Pseudosoluţia normală 69
Pseudosoluţie 60

Rădăcini simple şi multiple 87
Rangul pe coloane 35
Rangul pe linii 35
Raza spectrală 92
Reducerea conicelor şi cuadricelor la axele de simetrie 100
Reducerea unei f.p. la o formă canonică 97
Reflexie elementară 65
Regresia liniară 62
Relaţie de dependenţă liniară (peste K) 29
Rotaţia vectorilor planului 43

Scalari 27
Simbolul lui Kronecker 61
Sistem diferenţial liniar 72
Soluţia generală 21, 93
Soluţie generală omogenă 21
Spaţiul soluţiilor (unui sistem diferenţial) 76
Spectrul matricei 76
Subspaţii ortogonale 55
Subspaţiile nucleul şi imagine 40
Subspaţiu 34
Surjectivitatea unei aplicaţii 40

Teorema Cayley-Hamilton 86
Teorema lui Weierstrass 146
Transformare de congruenţă 102
Transformare Householder 65
Transformări conforme 64
Transformări rigide 64
Transpunere 27
Transpunerea complexă sau hermitică 77

Unghiul între doi vectori 51

Valori proprii 75
Vectori ortogonali 52
Vectorii proprii 76
Vector-matrice 28
Vector-polinom 28
Vector-eroare în metoda c.m.m.p 62
Versorii axelor de coordonate 31
Versorul unui vector 52
Volumul orientat 123

RECOMANDĂRI BIBLIOGRAFICE

1. PENTRU ALGEBRA LINIARĂ ŞI APLICAŢIILE SALE:

[1]. **Bellman R.** – *Introducere în analiza matricealã* (traducere din limba engleză), Editura Tehnică, Bucureşti, 1969.

[2]. **Hartfiel D.J., Hobbs A.M.** – *Elementary Linear Algebra*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1987.

[3]. **Hill R.O., Jr.** – *Elementary Linear Algebra with Applications* (2nd ed.), Academic Press, New York, 1991.

[4]. **Reza F.** – *Spaţii liniare* (traducere din limba engleză), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.

[5]. **Strang G.** – *Linear Algebra and Its Applications* (3rd ed.), Academic Press, San Diego, 1988.

2. PENTRU ALGEBRA NUMERICĂ:

[1]. **Golub G.H., Van Loan C.F.** – *Matrix Computations* (2nd ed.), John Hopkins University Press, Baltimore, 1989.

[2]. **Todd J.** – *Basic Numerical Mathematics*, Vol. 2: Numerical Algebra, Academic Press, New York, 1978.

3. CULEGERI DE PROBLEME:

[1]. **Brînzănescu V., Stănăşilă O.** - *Lumea liniară*, Lit. IPB, Bucureşti, 1981.

[2]. **Fadeev D., Sominski I.** – *Recueil d'exercices d'algèbre superieure,* Edit. MIR, Moscou, 1973.

[3]. **Ikramov H.** – *Recueil de problèmes d'algèbre linéaire*, Edit MIR, Moscou, 1977.

[4]. **Proskuriakov I.V.** – *Problems in Linear Algebra,* MIR Publ., Moscow, 1978.

[5]. **Udrişte C., Radu C., Dicu C., Mălăncioiu O.** – *Probleme de algebră, geometrie şi ecuaţii diferenţiale,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.

Tiparul executat la tipografia
Olimp Publishing & Prin. Prod. s.r.l.